

Correction TD n°4

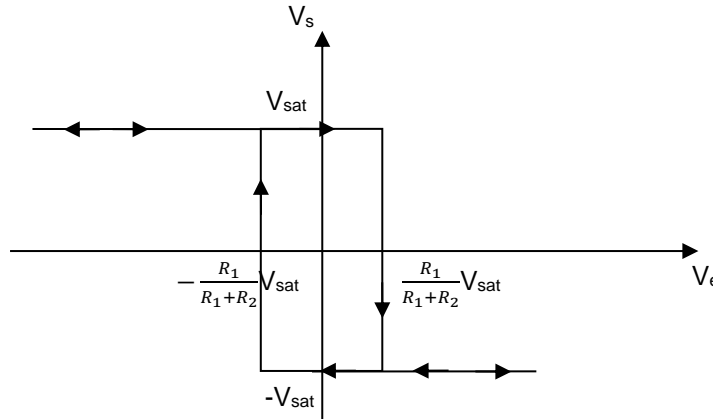
Exercice 1 :

1.1. Ce montage ne peut pas fonctionner en régime linéaire puisqu'il n'y a pas de rétroaction sur la borne inverseuse.

1.2. $V_s = \pm V_{sat}$

1.3. $V_s = V_{sat}$ pour $V_e < \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$ et $V_s = -V_{sat}$ pour $V_e > \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$

1.4.

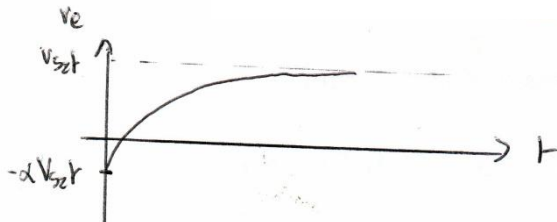


1.5. Montage comparateur à hystérésis.

2.1. Comme l'ALI est parfait, le courant traversant la résistance R et le condensateur sont identiques.

$$v_s = v_e + \tau \frac{dv_e}{dt}$$

2.2. $v_e(t) = V_{sat} (1 - (1+\alpha)e^{-t/\tau})$



2.3. La limite de v_e en l'infini est $+V_{sat}$, mais cette limite ne sera pas atteinte car pour $v_e = \alpha V_{sat}$, v_s bascule et vaut $-V_{sat}$.

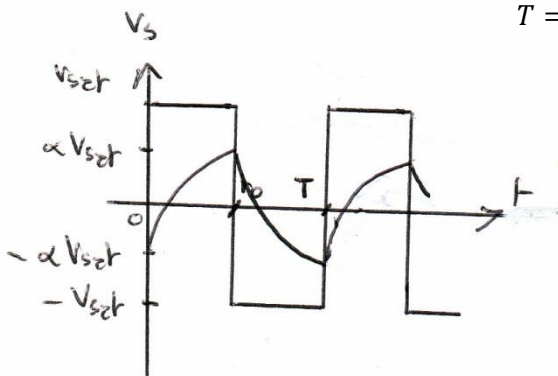
$$t_0 = \tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

2.4 $v_e(t_0^+) = \alpha V_{sat}$ et $v_s(t_0^+) = -V_{sat}$.

Pour $t > t_0$: $v_e(t) = V_{sat} (-1 + (1+\alpha) e^{-(t-t_0)/\tau})$

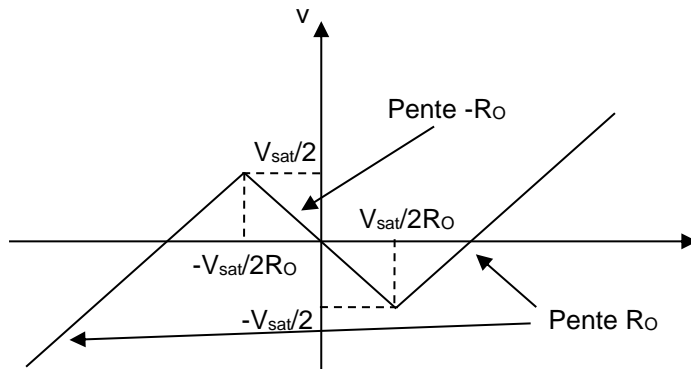
2.5 La période du signal se détermine en cherchant l'instant T pour lequel l'ALI commute de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$. En faisant le même type de raisonnement qu'à la question 2.3 on obtient :

$$T = 2\tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

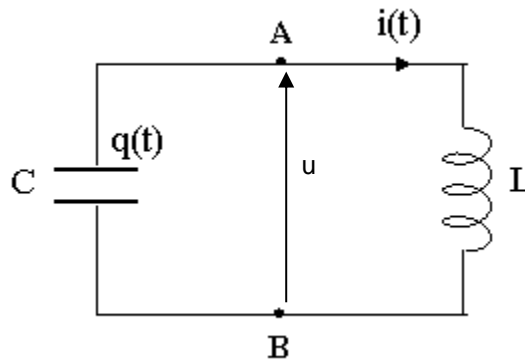


Exercice 2 :

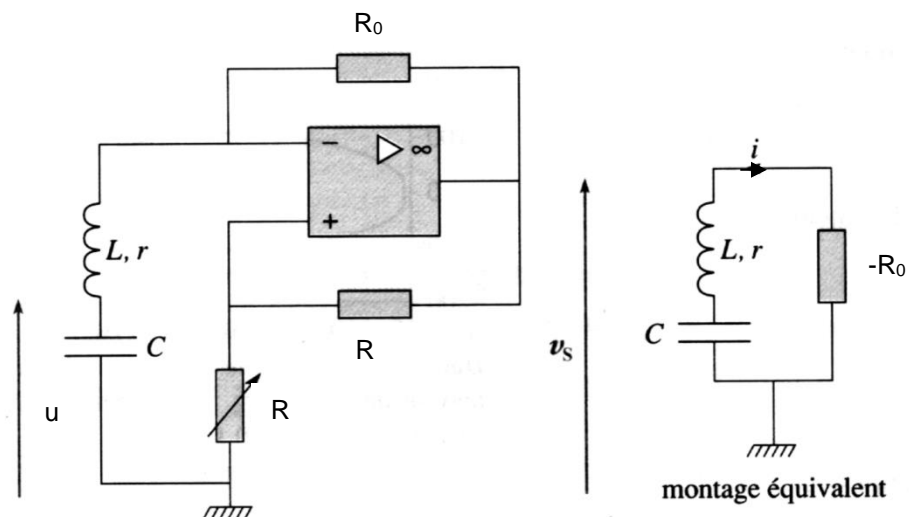
- 1- $v = R_0 i + v_s$ et $v_+ = v_s/2$
- 2- $v = -R_0 i$: montage résistance négative.
- 3- $-V_{SAT}/2 < v < +V_{SAT}/2$ et $-V_{SAT}/2R_0 < i < +V_{SAT}/2R_0$
Si l'ALI sature : $v = R_0 i \pm V_{SAT}$.
- 4-



5-



- 6- $LC \frac{d^2u}{dt^2} + u = 0$
- 7- Si le condensateur était initialement chargé, on observerait des oscillations d'amplitude exponentiellement décroissante. En effet il y a forcément des pertes (résistance du bobinage).
- 8-



- 9- $LC \frac{d^2u}{dt^2} + C(r - R_0) \frac{du}{dt} + u = 0$
Pour avoir des oscillations sinusoïdales il faut que $r = R_0$ (le montage ALI compense exactement les pertes Joules dans la résistance du bobinage).

La pulsation des oscillations vaut : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

- 10- Si $r > R_0$ on aura des oscillations amorties (l'ALI ne compense pas assez les pertes).
Si $r < R_0$ on aura des oscillations dont l'amplitude augmente jusqu'à saturation de l'ALI. Les oscillations ne seront pas purement sinusoïdales. Le spectre de la tension u sera donc composé de plusieurs raies : un fondamental à la pulsation ω_0 et des harmoniques de pulsation $k \omega_0$ avec k entier et $k > 1$.

Exercice 3 :

Q1. L'Amplificateur Linéaire Intégré idéal a les caractéristiques suivantes :

- impédance d'entrée infinie (donc les courants de polarisations sont nuls)
- impédance de sortie nulle
- gain différentiel infini (donc $v_+ = v_-$ en régime linéaire).

Q2. Il n'y a pas de rétroaction sur la borne inverseuse donc l'ALI fonctionne nécessairement en régime saturé. Ce montage constitue un comparateur simple.

Q3. Sur l'intervalle de temps $[0, T[$ la pente est constante donc :

$$a = \frac{du_{scie}}{dt} = \frac{\Delta u_{scie}}{\Delta t}$$

On en conclut que :

$$a = \frac{U_{max}}{T}$$

Q4. Sur l'intervalle de temps $[0, T[$ la tension u_{scie} s'écrit :

$$u_{scie}(t) = at = \frac{U_{max}}{T}t$$

Pour la saturation haute on a : $u_{mod} = +V_{sat}$, donc $\varepsilon = v_+ - v_- = u_e - u_{scie} > 0$ soit encore $u_e > u_{scie}$.

On en déduit que la durée de saturation haute vérifie :

$$U_0 = \frac{U_{max}}{T} \tau_+$$

Soit encore :

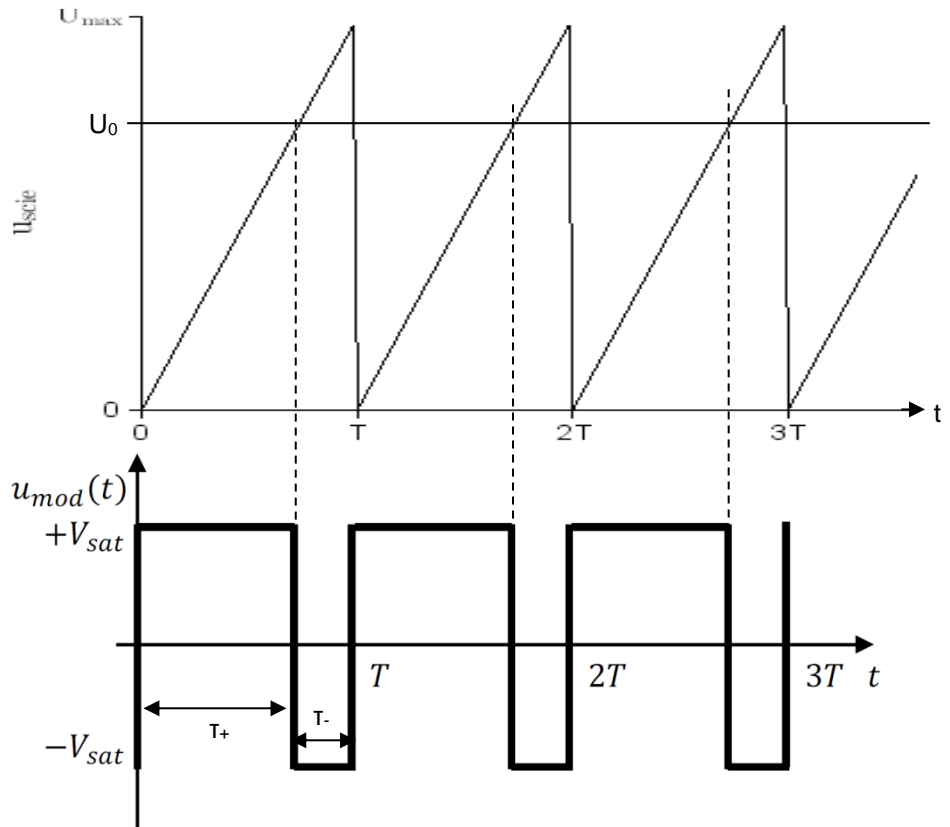
$$\tau_+ = T \frac{U_0}{U_{max}}$$

Le reste de la période l'ALI est en saturation basse donc :

$$\tau_- = T - \tau_+$$

On en conclut :

$$\tau_- = T \left(1 - \frac{U_0}{U_{max}} \right)$$



Q5. Si $U_0 > U_{max}$ alors ϵ est toujours positif donc l'ALI est toujours en saturation haute soit : $u_{mod}(t) = +V_{sat}$ pour tout t.

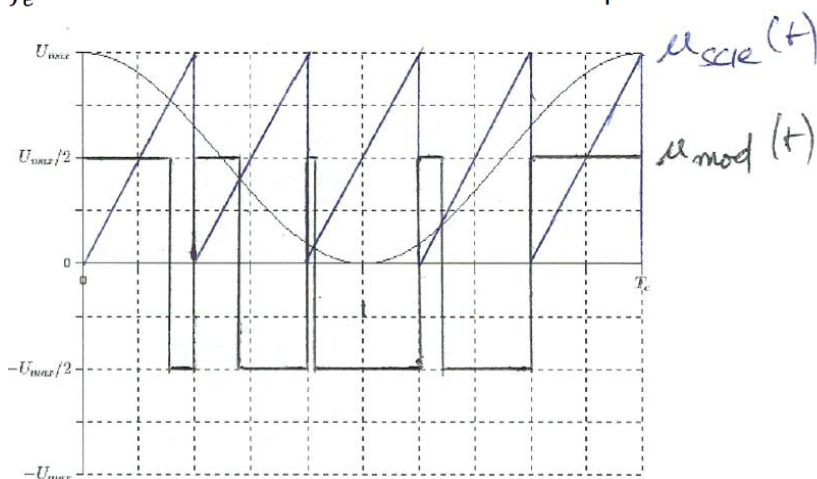
Q6.a. Le signal décrit s'écrit :

$$u_e(t) = \frac{U_{max}}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{5T}\right) \right)$$

Q6.b. Spectre de $u_e(t)$:



Q6.c.



Q6.d. Pour obtenir $u_e(t)$ à partir du signal $u_{mod}(t)$ il faut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure comprise entre 3 kHz et 5 kHz.

En effet le signal u_e se retrouve dans les deux premières raies de u_{mod} (la première pour $f = 0$ et la deuxième pour $f = 1$ kHz).

Remarque : la richesse du spectre du u_{mod} s'explique par ses discontinuités.

Q7. Les ordres de grandeurs des impédances d'entrée et de sortie réelles d'un ALI dépendent du modèle mais grossièrement l'impédance d'entrée est de l'ordre de 1 M Ω et l'impédance de sortie de quelques dizaines d'ohm.

Q8. Les ALI étant idéaux leur impédance de sortie est nulle, l'existence d'un courant de sortie (branchement d'un étage en cascade) ne modifie donc pas la valeur de la tension de sortie de chaque étage.

Q9.a. Le courant de polarisation vérifie : $i_- = 0$ (ALI idéal) donc le courant circulant dans R_1 est égal à celui circulant dans le condensateur. On en déduit que :

$$\frac{u_e - v_-}{R_1} = C \frac{d}{dt} (v_- - u_s)$$

On suppose que l'ALI est en régime linéaire (rétroaction sur borne inverseuse) donc $v_- = v_+ = 0$.

On en déduit l'équation différentielle demandée :

$$\boxed{\frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} u_e}$$

Q9.b. De la même façon qu'à la question précédente on a :

$$\boxed{\frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{R_2 C} u_e}$$

Q10.a. L'ALI de l'étage 2 n'a pas de rétroaction sur la borne inverseuse, il va donc nécessairement fonctionner en régime de saturation.

Q10.b. Si $u_e = V_{sat}$ alors $\varepsilon = v_+ - v_- > 0$. Or $v_- = 0$ donc $v_+ > 0$.

L'ALI étant idéal, le courant de polarisation i_+ est nul. Ce qui implique que le courant circulant dans R_3 est le même que celui qui circule dans R_4 . On en déduit que :

$$\frac{u_s - v_+}{R_3} = \frac{v_+ - u_e}{R_4}$$

En isolant v_+ on obtient :

$$v_+ = \frac{R_4 u_s + R_3 u_e}{R_3 + R_4} > 0$$

D'où l'inégalité vérifiée par u_s :

$$u_s > -\frac{R_3}{R_4} u_e$$

Soit encore :

$$\boxed{u_s > -\frac{1}{2} V_{sat}}$$

Q10.c. On utilise le même raisonnement qu'à la question précédente.

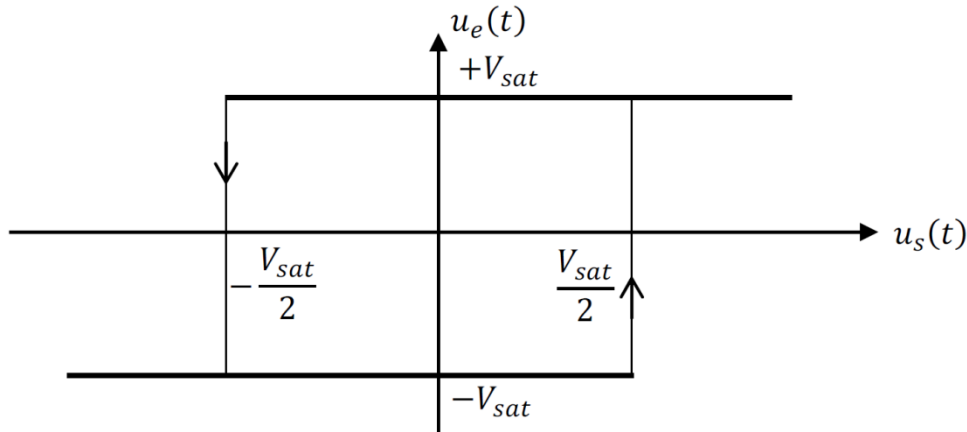
Si $u_e = -V_{sat}$ alors $\varepsilon < 0$ donc $v_+ < 0$.

La relation liant v_+ à u_e et u_s reste inchangée.

On en conclut que :

$$\boxed{u_s < \frac{1}{2} V_{sat}}$$

Q10.d. Des inégalités précédentes on en déduit la caractéristique entrée-sortie :



Ce type de montage réalise un comparateur à hystérésis.

Q11.a. Si à $t = 0$ le comparateur vient de basculer de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ cela implique, d'après la caractéristique établie à la question précédente, que :

$$u_s(t = 0) = \frac{V_{sat}}{2}$$

D'après l'équation différentielle vue à la question Q9.a, pour $u_e = +V_{sat}$ on a :

$$\frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} u_e$$

En intégrant de 0 à t de chaque côté, on obtient :

$$u_s(t) - u_s(t = 0) = -\frac{V_{sat}}{R_1 C} t$$

Soit encore :

$$u_s(t) = V_{sat} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{R_1 C} \right)$$

Q11.b. A la question Q10, on a montré que le comparateur à hystérésis basculait à la saturation basse pour $u_s = -V_{sat}/2$.

L'instant t_1 doit donc vérifier :

$$u_s(t_1) = V_{sat} \left(\frac{1}{2} - \frac{t_1}{R_1 C} \right) = -\frac{V_{sat}}{2}$$

On en déduit que :

$$t_1 = R_1 C$$

La durée pendant laquelle l'étage 2 est en saturation haute vérifie donc :

$$\Delta t_{haut} = t_1 = R_1 C$$

Q12.a. D'après la question Q9.b, l'équation différentielle vérifiée par u_s pour $u_e = -V_{sat}$ s'écrit :

$$\frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{R_2 C} u_e$$

En intégrant cette équation entre t_1 et t on obtient :

$$u_s(t) - u_s(t_1) = \frac{V_{sat}}{R_2 C} (t - t_1)$$

Soit encore :

$$u_s(t) = \frac{V_{sat}}{R_2 C} (t - R_1 C) - \frac{V_{sat}}{2}$$

On en conclut l'expression de la tension $u_s(t)$ pour $t > t_1$:

$$u_s(t) = V_{sat} \left(\frac{t}{R_2 C} - \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right)$$

Q12.b. A la question Q10, on a montré que le comparateur à hystérésis basculait en saturation haute pour $u_s = V_{sat}/2$. L'instant t_2 doit donc vérifier :

$$u_s(t_2) = V_{sat} \left(\frac{t_2}{R_2 C} - \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{V_{sat}}{2}$$

D'où l'expression de l'instant t_2 :

$$t_2 = (R_1 + R_2)C$$

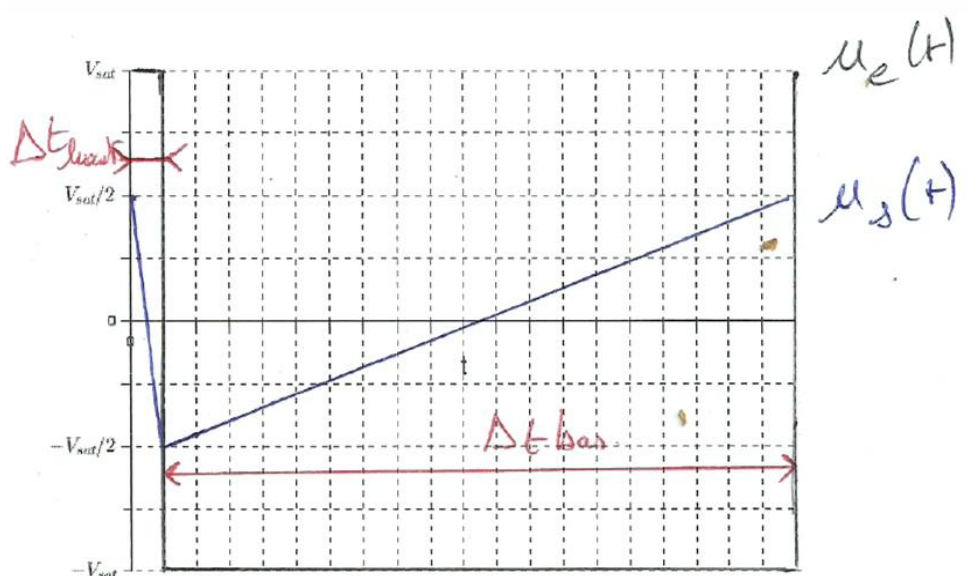
La durée pour laquelle l'étage 2 est en saturation basse vaut :

$$\Delta t_{bas} = t_2 - t_1 = R_2 C$$

La période de u_s vérifie :

$$T = \Delta t_{haut} + \Delta t_{bas} = t_2 = (R_1 + R_2)C$$

Q13.



Q14. De la valeur de la fréquence et de la capacité on en déduit que :

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{fC}$$

De la relation entre Δt_{bas} et Δt_{haut} on en déduit que :

$$R_2 = 19 R_1$$

On en déduit, en réinjectant dans la première équation que :

$$R_1 = \frac{1}{20fC} \text{ et } R_2 = \frac{19}{20fC}$$

AN : $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 95 \text{ k}\Omega$

Exercice 4 :

- 1) Le calcul d'énergie magnétique emmagasinée par les bobines donne $|M| < L = 8 \text{ mH}$

L'impédance ramenée à la bobine vaut : $R + R \frac{M^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} + j\omega(L - L \frac{M^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2})$, $R_{eq} = 37,5 \Omega$
et $L_{eq} = 6 \text{ mH}$

2) Quand on approche la plaque métallique (non magnétique), on se retrouve avec deux circuits en influence. L'impédance ramenée à la bobine vaut : $R + R' \frac{M^2 \omega^2}{R'^2 + L'^2 \omega^2} + j\omega(L - L' \frac{M^2 \omega^2}{R'^2 + L'^2 \omega^2})$, on observe une diminution de l'inductance équivalente et une augmentation de la résistance. Le matériau métallique n'a pas de propriétés magnétiques, sinon on pourrait observer une augmentation de l'inductance.

On peut mesurer ces impédances à l'aide d'un montage pont Wheatstone, ou en relevant la réponse temporelle ou fréquentielle d'un circuit RLC ou encore en mesurant la fréquence d'oscillation d'un oscillateur LC.

3) Les fréquences d'oscillations des deux circuits LC étant différentes le multiplicateur va faire apparaître cette différence ainsi que la somme (linéarisation du produit de cosinus). Cette dernière est enlevée par le filtre passe-bas et il ne reste plus qu'un signal dont la fréquence fait intervenir ΔL :

$$\text{Avec } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L C}}, \quad f_{\text{final}} = f_0 \left(1 - \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \approx f_0 \frac{\Delta L}{2L}$$

La fréquence doit appartenir au domaine audible (20 Hz - 20 kHz), ce qui donne pour $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L C}}$ un encadrement $40\text{kHz} \leq f_0 \leq 640\text{kHz}$. Les caractéristiques de la bobine vont sûrement dépendre de la fréquence, comme on ne les connaît que pour 60 kHz qui convient, il faut le choisir. On obtient $C = 0,88 \text{ nF}$ et $30\text{Hz} < f < 1,9\text{kHz}$.

Sinon $7,7\text{pF} < C < 2\text{nF}$.

Il faudra connaître les caractéristiques de la bobine à plus haute fréquence, avec une résistance sûrement plus élevée. Le circuit actif devra aussi fonctionner à plus haute fréquence. Si $\frac{\Delta L_{\text{max}}}{\Delta L_{\text{min}}} \geq 1000$, il suffit de prendre une capacité variable ou quelques capacités permettant de changer la valeur de C sur plusieurs sensibilités. La fréquence devra être plus grande donc la capacité plus petite.

4) On obtient l'équation différentielle $L \frac{d^2 i_D}{dt^2} + (r - R_0) \frac{di_D}{dt} + \frac{1}{C} i_D = 0$. Il suffit de prendre $R_0 = r$.

5) C'est une résistance négative. Le composant actif est tout simplement un amplificateur linéaire intégré. Cf exercice 2.