

Correction TD n°3

Remarques générales sur le traitement des exercices comportant un ALI :

1- Identifier le modèle de l'ALI :

- Si l'ALI est parfait avec un gain différentiel infini, en régime linéaire on aura $v_+ = v_-$ et en régime non-linéaire $v_s = \pm V_{sat}$
- Si le gain différentiel n'est pas infini (précisé dans l'énoncé), on utilise le modèle du 1er ordre: $s = \mu\epsilon$ avec $\mu = \mu_0/(1+\tau p)$.

Attention : Dans ce dernier cas, même en régime linéaire $v_+ \neq v_-$.

2- Identifier le régime de fonctionnement de l'ALI à gain différentiel infini :

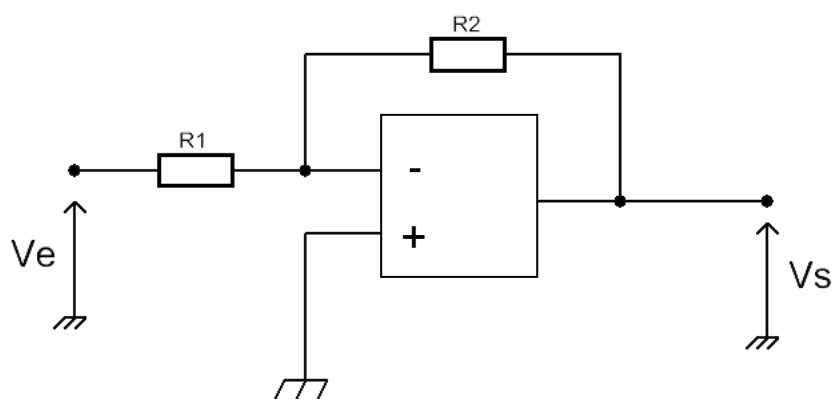
- S'il y a une rétroaction sur la borne inverseuse : le régime linéaire est possible.

Attention : cette condition n'est pas suffisante. On peut avoir une rétroaction sur la borne inverseuse et avoir un ALI qui fonctionne en régime non-linéaire (cf. ex 1 et 4)

- S'il n'y a pas de rétroaction sur la borne inverseuse : le fonctionnement est nécessairement non-linéaire donc $v_s = \pm V_{sat}$. Dans ce cas on fait une hypothèse sur la valeur de v_s et on en déduit l'intervalle des valeurs pour la tension d'entrée.

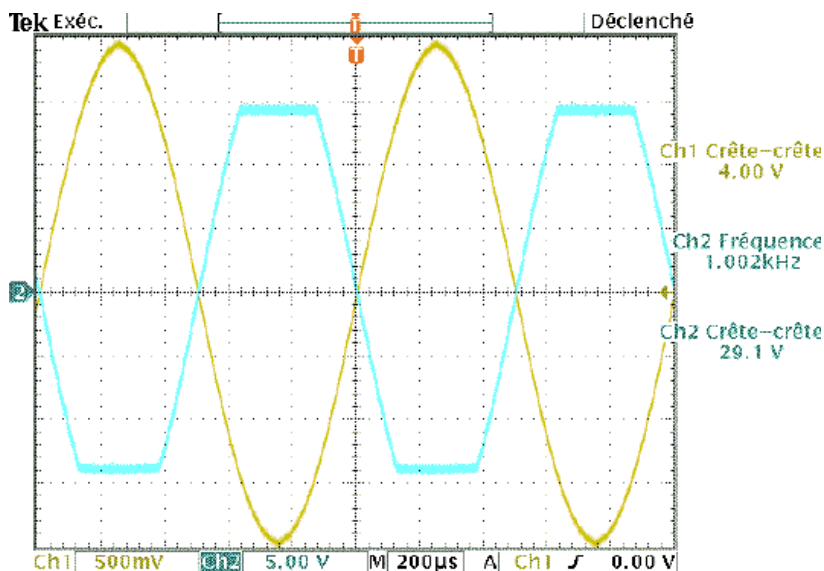
Exercice 1 :

1-



$$H = -R_2/R_1$$

2- Il y a des intervalles où l'ALI sature car pour certaines de l'entrée car $\frac{R_2}{R_1} E_0 > V_{sat}$:



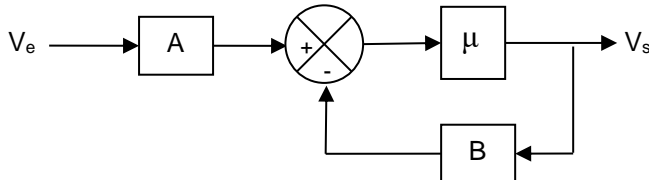
On en déduit que :

$$E_0 > \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$$

3- En utilisant la fonction de transfert $\mu(p) = \frac{\mu_0}{1+\tau p}$ pour le gain différentiel on en déduit la fonction transfert :

$$H(p) = -\frac{\mu_0 R_2}{R_1(1 + \mu_0) + R_2} \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_2}{(1 + \mu_0)R_1 + R_2} \tau p}$$

4- Le schéma bloc est le suivant :



avec $A = -\frac{R_2}{R_1+R_2}$ et $B = \frac{R_1}{R_1+R_2}$

5- En boucle ouverte la bande passante est de l'ordre de $[0 ; 100 \text{ rad.s}^{-1}]$ et en boucle fermée : $[0 ; 9.10^5 \text{ rad.s}^{-1}]$ (application numérique avec $\mu_0 = 10^5$).

La rétroaction augmente la bande passante et le système est donc plus rapide.

Exercice 2 :

L'ALI étant modélisé par une fonction de transfert du premier ordre, on a la relation suivante :

$$s = \frac{\mu_0}{1 + \tau p} \varepsilon$$

Avec p variable de Laplace, τ le temps de réponse de l'ALI qui vérifie $\tau = 10 \text{ ms}$, μ_0 le gain différentiel statique qui est de l'ordre de 10^6 et $\varepsilon = v_+ - v_-$.

Pour étudier la stabilité du montage on peut établir la fonction de transfert et étudier les signes des coefficients du dénominateur.

Les courants de polarisation étant nuls, les deux résistances R branchées à la borne non-inverseuse de l'ALI sont en série. De même pour les deux résistances R et kR branchées à la borne inverseuse.

Un pont diviseur de tension donne :

$$v_- = \frac{R}{R + kR} s = \frac{1}{k + 1} s$$

Et :

$$v_+ - e = \frac{R}{R + R} (s - e) = \frac{s - e}{2}$$

Soit encore :

$$v_+ = \frac{s + e}{2}$$

On réinjecte ces expressions dans la fonction de transfert de l'ALI :

$$s = \frac{\mu_0}{1 + \tau p} \left(\frac{s + e}{2} - \frac{s}{k + 1} \right)$$

Après calcul on obtient la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0}{2} \frac{1-k}{1+k} + \tau p}$$

Pour que le système soit stable il faut que $1 + \frac{\mu_0}{2} \frac{1-k}{1+k}$ soit positif, soit :

$$k < 1$$

Exercice 3 :

1- La fonction de transfert vaut : $H(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$.

2- $Z_e = R + \frac{1}{jC\omega}$

3- La fonction de transfert des deux filtres en cascade vaut :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

4- Dans ce cas on a :

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + jRC\omega)^2}$$

Grace au montage suiveur le courant de sortie du premier filtre est nul, la présence du deuxième filtre ne modifie donc pas la fonction de transfert du premier. La fonction de transfert de l'ensemble est le produit des deux fonctions de transfert de chacun des filtres.

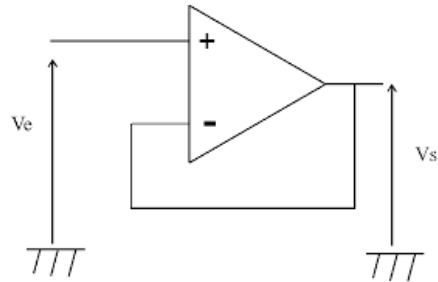
Exercice 4 :

1- Montage suiveur :

2- La sortie vaut $-V_{sat}$ donc l'ALI ne fonctionne pas en régime linéaire. L'expérimentateur a certainement inversé les entrées + et - de l'ALI.

Remarque : V_{sat} est toujours légèrement inférieur à la tension d'alimentation à cause de pertes.

3- Si la sortie est triangulaire alors que l'entrée est sinusoïdale c'est nécessairement dû à un phénomène non linéaire. Cela ne peut pas être une saturation en courant ou en tension car dans ce cas la sortie serait écrêtée. Ce phénomène est donc dû à la fréquence du signal d'entrée. En effet l'ALI ne peut pas avoir une sortie qui varie aussi vite qu'on le souhaite, il y a une limite de $\left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{max}$ appelé vitesse limite de balayage ou "slew rate" en anglais.



Si le signal est triangulaire, sur une demi-période on a un signal affine de pente :

$$\left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{max} = \frac{v_{smax} - v_{smin}}{T/2} = 2f(v_{smax} - v_{smin})$$

$$AN : \left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{max} = 12 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le signal d'entrée étant sinusoïdal, il est de la forme :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

La pente vérifie :

$$\frac{de}{dt} = -E_0\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Pour que l'ALI puisse suivre le signal d'entrée et que le phénomène de la vitesse limite de balayage n'apparaisse pas, il faut que la pente maximale du signal d'entrée soit inférieure à $\left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{max}$. On en déduit la fréquence limite à ne pas dépasser par l'inégalité :

$$E_0\omega < \left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{max}$$
$$f < \frac{1}{2\pi E_0} \left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{max} = f_{lim}$$

$$AN : f_{lim} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

4- On a de nouveau un système non-linéaire. Si la tension de sortie varie entre -2,5 et 2,5 V il ne s'agit pas d'une saturation en tension mais d'une saturation en courant.

La loi d'Ohm donne : $i_s = s/R$

D'où la valeur de la saturation en courant $i_{smax} = 25 \text{ mA}$.

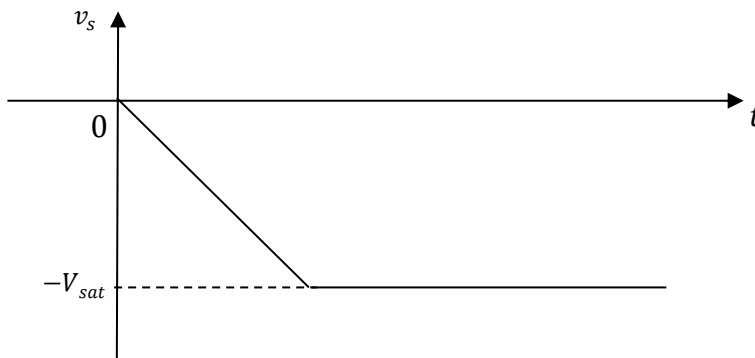
Pour résoudre ce problème en gardant le même signal d'entrée, il faut utiliser une résistance plus élevée. Sachant que $v_s = v_e$, la nouvelle résistance doit vérifier $R > v_e/i_{s\max} = 400 \Omega$, par exemple $R = 1 \text{ k}\Omega$.

Exercice 5 :

- 1- $\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}$. L'équation différentielle associée s'écrit : $\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_e}{RC}$.
- 2- En supposant que $v_s(0) = 0$, on a par simple intégration : $v_s(t) = -\frac{V_e}{RC}t$.

Le signal de sortie va croître (si $V_e < 0$) ou décroître (si $V_e > 0$), jusqu'à atteindre la tension de saturation $\pm V_{sat}$. A partir de ce moment la tension de sortie sera saturée et le régime de l'ALI ne sera plus linéaire.

Exemple avec $V_e > 0$ (en supposant que $v_s(0) = 0$) :



Avec ce montage intégrateur tout signal d'entrée non alternatif va irrévocablement faire dériver la sortie vers la saturation et l'ALI fonctionnera en régime saturé. Pour éviter ce problème, il faudrait que la partie continue du signal d'entrée ne soit pas intégrée.

AN : en prenant $V_{sat} = 15 \text{ V}$, au bout de $\Delta t = \frac{V_{sat}}{V_e} RC = 15 \text{ s}$ le régime sera saturé.

- 3- La fonction de transfert s'obtient en faisant l'association parallèle de R_0 et C .

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{R_0}{R} \frac{1}{1 + jR_0C\omega}$$

D'où l'équation différentielle :

$$v_s + R_0C \frac{dv_s}{dt} = -\frac{R_0}{R} v_e$$

- 4- Pour $\omega \gg \frac{1}{R_0C}$ l'équivalent de la fonction de transfert s'écrit $\underline{H}(j\omega) \sim -\frac{1}{jRC\omega}$ et on a bien un intégrateur sans avoir le problème précédent puisque pour la partie continue : $\underline{H}(0) = -\frac{R_0}{R}$, elle n'est donc pas intégrée.

Il faut choisir R_0 tel que $\frac{1}{R_0C}$ soit petit devant la pulsation du signal d'entrée pour qu'il soit intégré (sauf sa partie continue).

- 5- AN : $\underline{H}(10^4) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+100j} \simeq -\frac{1}{200j}$ et $\underline{H}(0) = -0,5$

On en déduit que :

$$v_s(t) = -0,1 - 1,5 \cdot 10^{-2} \sin(10^4 t)$$

$$\frac{1}{R_0C} = 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \ll \omega = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 6 :

- 1- En BF on a $H \sim -1$ et en HF on a $H \sim 1$.
- 2- La fonction de transfert vaut :

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1}$$

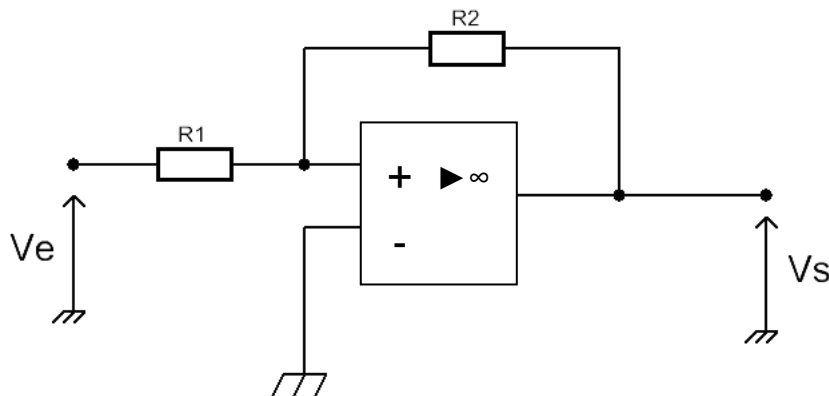
- 3- Le gain en décibel est toujours nul, quelque soit la pulsation et la phase vaut :

$$\varphi = \pi - 2\arctan(RC\omega)$$

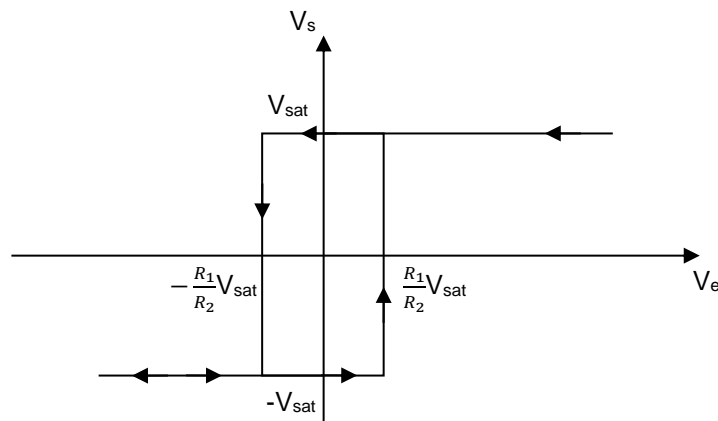
On a un montage déphaseur.

Exercice 7 :

- 1- Entrée : signal triangulaire alternatif de fréquence 100 Hz, d'amplitude crête à crête 14,9 V
Sortie : signal créneau alternatif de même fréquence, d'amplitude crête à crête 27,2 V.
Ce montage ne peut pas être un dérivateur car les sommets du triangle ne correspondent pas aux discontinuités du créneau.
- 2- Les amplitudes du créneau correspondent à $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$, l'ALI fonctionne donc en régime non-linéaire. La sortie bascule pour certaines valeurs de l'entrée et la sortie peut avoir une valeur $+V_{\text{sat}}$ ou $-V_{\text{sat}}$ pour la même valeur de l'entrée (par exemple 0 V) il s'agit donc d'un comparateur à hystérésis
La sortie bascule de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$ pour l'entrée inférieure à une tension négative.
La sortie bascule de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ pour l'entrée supérieure à une tension positive.
Il s'agit d'un comparateur à hystérésis non inverseur :



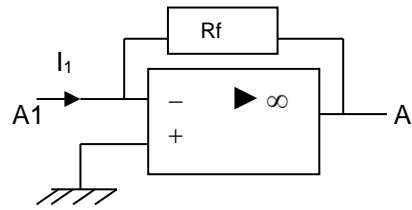
- 3- On branche la tension V_e à la voix 1 et V_s à la voix deux et on utilise le mode XY.
- 4-



Exercice 8 :

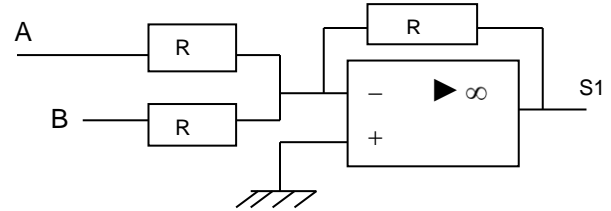
1- Bloc a : $V_A = -R_f I_1$

La tension de sortie est fixée par le courant d'entrée, c'est donc un montage convertisseur courant-tension.



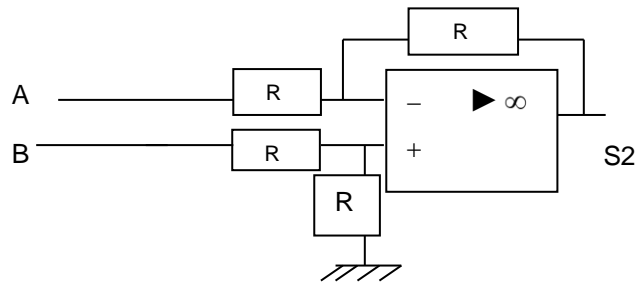
Bloc b : $V_{s1} = - (V_A + V_B)$

Montage sommateur



Bloc c : $V_{s2} = V_B - V_A$

Montage soustracteur



2- $V_{s1} = R_f (I_1 + I_2)$ et $V_{s2} = R_f (I_1 - I_2)$.

3- $U_s = 10 (I_2 - I_1)/(I_1 + I_2)$

Exercice 9 :

1. $V_0 = R_f i_0$. Ce montage permet d'avoir une tension de sortie de l'ALI proportionnelle au générateur de courant et indépendante du dipôle branché aux bornes de v_0 .

2. Le courant de polarisation étant nul, le courant i_f vérifie :

$$i_f = \frac{v_0 - v_-}{R_f} = i_0 + jC\Omega v_-$$

par une loi d'Ohm et une loi des nœuds.

En isolant v_- on obtient :

$$v_- = \frac{v_0 - R_f i_0}{1 + jR_f C \Omega}$$

De plus, la sortie de l'ALI vérifie :

$$v_0 = G(v_+ - v_-) = -Gv_-$$

car $v_+ = 0$

En isolant v_0 on en déduit le rapport demandé :

$$\frac{v_0}{i_0} = \frac{GR_f}{1 + G + jR_f C_d \Omega}$$

Soit encore :

$$\frac{v_0}{i_0} = \frac{R_f}{1 + \frac{1}{G} + j \frac{R_f C_d \Omega}{G}}$$

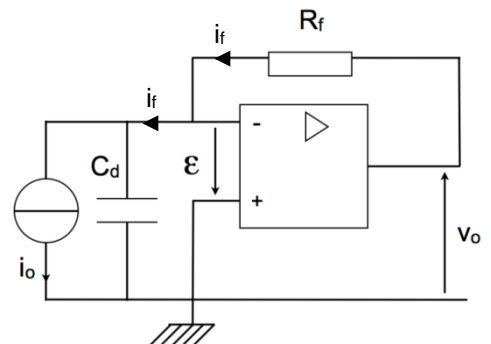
Dans le cas où $G \gg 1$, on peut simplifier ce rapport :

$$\frac{v_0}{i_0} = \frac{R_f}{1 + j \frac{R_f C_d \Omega}{G}}$$

Remarque : ce rapport est homogène à une impédance.

3. $\left. \frac{v_0}{i_0} \right|_{max} = R_f$

D'après la définition de la pulsation de coupure :



$$\left| \frac{v_0}{i_0} \right|_{\Omega=\Omega_c} = \frac{R_f}{\sqrt{2}}$$

On en déduit que la pulsation de coupure vaut :

$$\Omega_c = \frac{G}{R_f C_d}$$

4. Si on veut récupérer des signaux de fréquence allant jusqu'à $f = 100 \text{ Mhz}$, il faut que la fréquence de coupure vérifie :

$$\Omega_c > 2\pi f$$

Ce qui implique :

$$\frac{G}{R_f C_d} > 2\pi f$$

D'où l'inégalité vérifiée par la résistance :

$$R_f < \frac{G}{2\pi f C_d}$$

AN : $R_f < 16 \text{ M}\Omega$

Ce critère est très facilement vérifiable !

Il faut aussi que $v_0 < V_{sat}$ pour la valeur maximale de i_0 , à savoir $i_{0max} = 0,01 \text{ A}$.

Or le rapport $|v_0/i_0|$ est maximal pour $\Omega = 0$ et vaut R_f ce qui implique l'inégalité :

$$|v_0|_{max} = R_f i_{0max} < V_{sat}$$

D'où l'inégalité vérifiée par R_f :

$$R_f < \frac{V_{sat}}{i_{0max}}$$

AN : $R_f < 1,5 \text{ k}\Omega$.

C'est donc ce dernier critère qui doit être vérifié.

5. Le montage fonctionne en comparateur : si $v_0 > V_{ref}$, $s = V_{sat}$; si $v_0 < V_{ref}$, $s = -V_{sat}$. On recrée ainsi un signal binaire à partir du signal bruité à condition de bien choisir V_{ref} .

Si le signal est trop bruité, on ne peut pas reconstruire correctement les états haut et bas. Par exemple, si, à cause du bruit, $v_0(t) > V_{ref}$ alors le comparateur donnera un état haut au lieu de l'état bas attendu en l'absence de bruit.

Exercice 10 :

1) Il y a une rétroaction sur la borne inverseuse, donc on peut supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

2) Par définition de l'impédance d'entrée :

$$V_A = Z_e I$$

Le fonctionnement de l'ALI étant linéaire (et le gain différentiel infini) on a $V_+ = V_-$

Donc $V_A = V_-$.

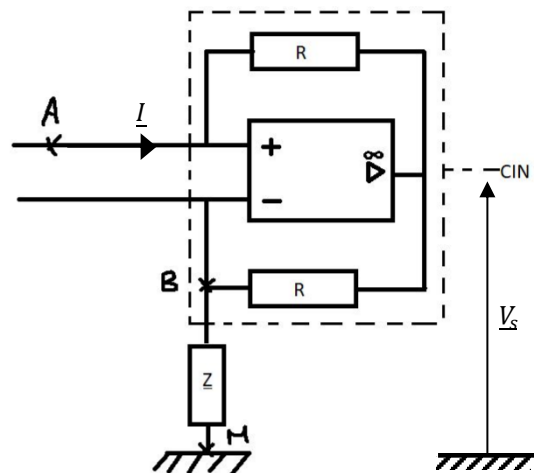
Dans le cas d'un ALI idéal, les courants de polarisation sont nuls donc on peut appliquer un pont diviseur de tension :

$$V_- = \frac{Z}{Z + R} V_s = V_A$$

La loi d'Ohm donne :

$$I = \frac{V_A - V_s}{R}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_A - V_s}{R}$$

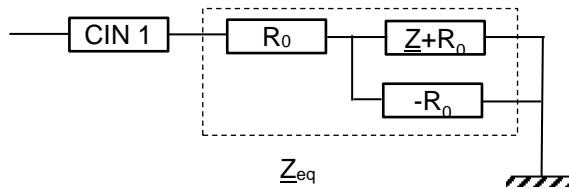


$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{V_A - \left(\frac{\underline{Z} + R}{\underline{Z}}\right) V_A}{R} = -\frac{V_A}{\underline{Z}}$$

On en conclut que l'impédance d'entrée vaut :

$$\underline{Z}_e = -\underline{Z}$$

- 3) En utilisant ce qui précède et en associant les dipôles on obtient le montage équivalent :



Le calcul de l'impédance équivalente donne :

$$\underline{Z}_{eq} = R_0 + \frac{-R_0(\underline{Z} + R_0)}{\underline{Z} + R_0 - R_0} = R_0 - R_0 - \frac{R_0^2}{\underline{Z}} = -\frac{R_0^2}{\underline{Z}}$$

On en déduit qu'entre les points A₁ et M on a l'impédance :

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_0^2}{\underline{Z}}$$

On retrouve bien ce qui est demandé avec $K = R_0^2$

- 4) Dans le cas \underline{Z} est un condensateur, on a :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

On en conclut que :

$$\underline{Z}_1 = jR_0^2 C \omega$$

Ce montage permet de simuler une inductance tel que $L_{eq} = R_0^2 C$, ce qui permet d'avoir un circuit prenant très peu de place et se comportant comme une inductance qui peut être élevée (par exemple en prenant $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$ on a $L_{eq} = 10 \text{ H}$) alors que la bobine de même inductance prendrait un grand volume.