Correction TD n°1

Exercice 1 :

Méthode :

- Dessiner le vecteur champ magnétique créé par l'aimant et vu par la bobine (bien faire attention au sens).
- Etudier, en fonction du mouvement de l'aimant, l'évolution de la norme de ce vecteur.
- Utiliser la loi de Lenz (la fem induite tend par ses conséquences à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance) et en déduire le sens du champ magnétique induit qui s'oppose **aux variations** du champ magnétique créé par l'aimant.
- En prenant bien en compte le sens de l'enroulement, en déduire le sens du courant induit.

Réponse : le galvanomètre indique un courant négatif.

Autre méthode :

- Orienter le circuit avec un courant entrant dans la borne + du galvanomètre (car avec cette orientation la mesure du galvanomètre a le même signe que celui du courant).
- En déduire l'orientation des surfaces des spires.
- Dessiner le vecteur champ magnétique créé par l'aimant et vu par la bobine (bien faire attention au sens).
- Etudier, en fonction du mouvement de l'aimant, l'évolution de la norme de ce vecteur.
- En déduire l'évolution du flux magnétique (augmente ou diminue ?).
- Utiliser la loi de Faraday et en déduire le signe de la fem induite.
- Faire un schéma électrique équivalent et en déduire le signe du courant.

Exercice 2 :

1- k s'exprimer en T.m^{-1} et B_0 en T.

2- Par définition du flux magnétique :

$$\phi = \iint \vec{B}.d\vec{S}$$

Pour le carré décrit dans l'énoncé $\vec{B}$ et $d\vec{S}$ sont orthogonaux (puisque $\vec{B}$ est suivant $\vec{e}_y$ et $d\vec{S}$ suivant $\vec{e}_x$) donc $\vec{B}.d\vec{S} = 0$, ce qui implique que $\boxed{\phi = 0}$.

3- Dans ce cas $\vec{B}$ et $d\vec{S}$ sont colinéaires et dans le même sens donc $\vec{B}.d\vec{S} = B.dS$, le flux magnétique vérifie donc :

$$\phi = \int_{x=2e-a/2}^{2e+a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} B dx dz$$

Sur cet intervalle B est homogène et vaut B_0 donc :

$$\phi = \int_{x=2e-a/2}^{2e+a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} B_0 dx dz = B_0 \int_{x=2e-a/2}^{2e+a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} dx dz$$
$$= B_0 \left(\int_{x=2e-a/2}^{2e+a/2} dx \right) \left(\int_{z=-a/2}^{a/2} dz \right)$$

On en conclut que $\boxed{\phi = B_0 a^2}$

Si l'orientation de la surface est inversée alors $\vec{S} = -a^2 \vec{e}_y$, ce qui implique que $\vec{B}.d\vec{S} = -B.dS$ et $\boxed{\phi = -B_0 a^2}$

4- Etant donnée que l'orientation de la surface est suivant $\vec{e}_y$, on a $\vec{B}.d\vec{S} = B.dS$, donc :

$$\phi = \int_{x=0}^{x}\int_{z=-a}^{a} B dx dz$$

Attention : B n'est pas uniforme sur cet surface, on ne peut donc pas le sortir de l'intégrale.

$$\phi = \int_{x=0}^{x} kx dx \int_{z=-a}^{a} dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = kax^2}$$

5- Comme dans la question précédente :

$$\phi = \int_{x=0}^{x}\int_{z=-a}^{a} B dx dz$$

Dans ce cas $x > e$ donc il faut séparer l'intégrale sur en deux intervalles :

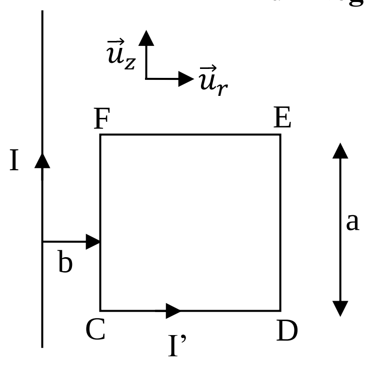
$$\phi = \left(\int_{x=0}^{e} kx dx + \int_{x=e}^{x} B_0 dx\right)\int_{z=-a}^{a} dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 2a\left(k\frac{e^2}{2} + B_0(x-e)\right)}$$

Exercice 3 :

1- <u>Remarques</u> : - attention aux bornes d'intégration pour le calcul de la résultante de la force, elles doivent être données par le sens du courant (ou l'orientation du circuit).

- quand on exprimer le vecteur $d\vec{l}$ en fonction du repère du problème, **inutile de mettre un signe moins** devant le vecteur unitaire en fonction du sens de parcourt du circuit : **le signe se trouve dans les bornes d'intégration**.



Calcul de la résultante des forces de Laplace sur le cadre :

$$\vec{F}_L = \int_{(CDEF)} I' d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$= \int_C^D I' d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_D^E I' d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_E^F I' d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_F^C I' d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

<u>Remarque</u> : les bornes d'intégration respectent bien le sens du courant I'.

$$\vec{F}_L = \int_b^{a+b} I' dr\vec{u}_r \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta + \int_0^a I' dz\vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}\vec{u}_\theta + \int_{a+b}^{b} I' dr\vec{u}_r \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta + \int_a^0 I' dz\vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\vec{u}_\theta$$

<u>Remarques</u> : - Il n'y a pas de signe moins devant les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ sur les segments EF et FC, car il est déjà inclus dans les bornes d'intégration.

- Sur certains segments (ceux qui sont verticaux) la valeur de r est fixée.
- La 1ère intégrale est l'opposée de la 3ème puisque c'est exactement la même fonction à intégrer mais les bornes sont en sens inverse.

Après calcul on trouve :

$$\boxed{\vec{F}_L = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \frac{a^2}{b(a+b)} \vec{u}_r}$$

Remarque : la résultante de la force de Laplace est non nulle puisque le champ magnétique n'est pas uniforme.

2- Réponse :

$$\boxed{\Phi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{a+b}{b}}$$

Remarque : attention au sens de $d\vec{S}$ dans la définition du flux magnétique. Son orientation est donnée par l'orientation du circuit (ou sens du courant). Ici on a : $d\vec{S} = -dS\,\vec{u}_\theta$

Exercice 4 :

Méthode : - Commencer par un schéma !
- Ne pas oublier de choisir un sens d'orientation du circuit.
- Utiliser la loi de Faraday (attention à bien respecter la cohérence entre le sens d'orientation du circuit et la sens du vecteur $d\vec{S}$ pour le calcul du flux magnétique).
- Faire un schéma électrique équivalent et utiliser la loi des mailles (attention à bien respecter la convention générateur de la fem induite).
- Pour la vérification de la loi de Lenz, cf. exercice 1.

Réponse : si on choisit d'orienter le circuit tel que son vecteur normal soit suivant $+\vec{u}_z$:

$$\boxed{i(t) = \frac{ab}{R} B_0 \omega \sin \omega t}$$

Si on choisit d'orienter le circuit dans l'autre sens on trouve évidemment un courant qui vaut l'opposer de ce qui précède.

Exercice 5 :

1- Transformateur parfait : - résistance des bobinages nulle
- couplage magnétique parfait
- toute la puissance reçue au primaire est fournie au secondaire.

2- On pose φ_c le flux commun (flux magnétique à travers une spire qui est le même aussi bien au primaire qu'au secondaire puisque le couplage magnétique est parfait).

La loi de Faraday donne :

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -n_1 \frac{d\varphi_c}{dt}$$

De même :

$$e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -n_2 \frac{d\varphi_c}{dt}$$

Or la fem induite est toujours en convention générateur donc $u_1 = -e_1$ et $u_2 = -e_2$.

On en déduit la relation :

$$\boxed{u_2 = \frac{n_2}{n_1} u_1}$$

Pour le courant il suffit d'utiliser la dernière hypothèse du transformateur parfait :

$$P_1 + P_2 = 0$$

Où P_1 et P_2 sont les puissances reçues au primaire et au secondaire.

On en déduit que : $u_1 i_1 = -u_2 i_2$

D'où la relation sur les courants :

$$\boxed{i_2 = -\frac{u_1}{u_2} i_1 = -\frac{n_1}{n_2} i_1}$$

3- AN : $\frac{n_2}{n_1} = 0{,}022$ et $n_2 = 11$

Exercice 6 :

1- On applique une loi des mailles :

$$\begin{cases} E = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ 0 = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2- x et y vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{E}{R} = x + \frac{L+M}{R}\frac{dx}{dt} \\ \frac{E}{R} = y + \frac{L-M}{R}\frac{dy}{dt} \end{cases}$$

On pose les constantes de temps τ_1 et τ_2 valant :

$$\tau_1 = \frac{L+M}{R}$$

$$\tau_2 = \frac{L-M}{R}$$

Après calcul on trouve :

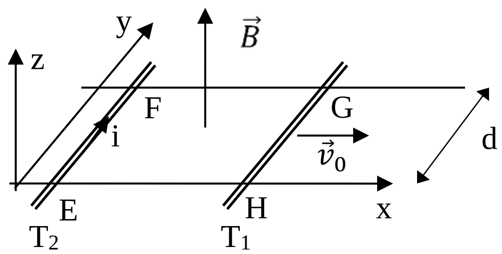
$$\boxed{\begin{cases} i_1 = \frac{E}{2R}\left(2 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) \\ i_2 = \frac{E}{2R}\left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \end{cases}}$$

3- Il suffit d'écrire le système d'équation de la question 1 en notation complexe, puis d'isoler $\underline{I_2}$:

$$\boxed{\underline{I_2} = -\frac{jM\omega}{(R + jL\omega)^2 + M^2\omega^2} E}$$

Exercice 7 :

1- Ici, nous sommes dans le cas de l'induction de Lorentz (circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire) : c'est la déformation initiale du circuit qui va créer la fem induite. Or d'après la loi de Lenz, la fem induite tend par ses conséquences à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance, à savoir la déformation du circuit. Le courant induit créera donc une force de Laplace vers la droite sur la tige T_2 et la mettra donc en mouvement.



Remarque : pour que la force de Laplace sur T_2 soit orientée vers la droite, il faut que le courant, tel qu'il est orienté sur le schéma ci-contre, soit positif.

2- Méthode : dans le cas de l'induction de Lorentz on a toujours deux systèmes d'équations : un mécanique et un électrique. L'équation électrique s'obtient en faisant un schéma électrique équivalent. Les étapes sont les suivantes :

- Orienter le circuit.

- Appliquer la loi de Faraday pour calculer la fem induite.
- Faire le schéma électrique équivalent et en déduire le courant induit.
- Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur chaque tige (attention au sens d'intégration qui doit bien respecter l'orientation du circuit).
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique sur chaque tige.
- Résoudre les deux équations différentielles obtenues.

Calcul du flux à travers le circuit :

$$\Phi = \iint_{(cadre)} \vec{B}.d\vec{S} = \iint_{(cadre)} B\vec{u}_z.(-\vec{u}_z dS) = -\iint_{(cadre)} BdS$$

$$\Longrightarrow \Phi = -B\int_{y=0}^{d}\int_{x=x_2}^{x_1} dx\,dy = -Bd(x_1 - x_2)$$

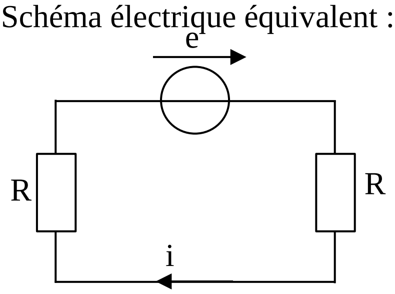
Remarque : on cherche à calculer le flux à tout instant donc ne pas calculer le flux dans le cas particulier du temps initial $t = 0$.

D'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Bd(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = Bd(v_1 - v_2)$$

Où v_1 et v_2 sont respectivement la vitesse de la tige T_1 et de la tige T_2.

Schéma électrique équivalent :



On en déduit que le courant induit vaut :
$i = \frac{e}{2R} = \frac{Bd}{2R}(v_1 - v_2)$

Calculons les forces de Laplace s'exerçant sur chaque tige.

Sur T_1 :

$$\vec{F}_{L1} = \int_G^H i\,d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_{y=d}^{0} i\,dy\,\vec{u}_y \wedge (B\,\vec{u}_z) = -Bid\,\vec{u}_x = -\frac{B^2d^2}{2R}(v_1 - v_2)$$

De même sur T_2 :

$$\vec{F}_{L1} = \int_E^F i\,d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_{y=0}^{d} i\,dy\,\vec{u}_y \wedge (B\,\vec{u}_z) = Bid\,\vec{u}_x = \frac{B^2d^2}{2R}(v_1 - v_2)$$

En appliquant le principe fondamental projeté sur x sur chaque tige on obtient le système d'équation différentielle :

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{B^2d^2}{2R}(v_1 - v_2) \\ m\dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{B^2d^2}{2R}(v_1 - v_2) \end{cases}$$

Remarque : il y a deux équations mécaniques puisque le mouvement d'une tige est indépendant de l'autre. On ne peut pas traduire la déformation du cadre par une seule équation mécanique.

En sommant les deux équations termes à termes, on obtient :

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(v_1 + v_2) = 0 \Longrightarrow v_1 + v_2 = cste$$

La somme des deux vitesses ne varie pas au cours du temps, donc elle est égale à celle obtenue à l'état initial. On en déduit que :

$$v_1 + v_2 = v_0$$

En remplaçant v_2 par $v_0 - v_1$ dans la première équation différentielle, on en déduit une équation différentielle sur v_1.
Après résolution et calcul on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} v_1 = \dfrac{v_0}{2}\left(1 + e^{-t/\tau}\right) \\ v_2 = \dfrac{v_0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{cases}}$$

Avec : $\tau = \frac{mR}{B^2 d^2}$

Remarque : quand $t \to \infty$, les deux vitesses tendent vers $v_0/2$, les deux tiges sont à la même vitesse et le circuit n'est plus déformé : il n'y a plus d'induction. Ceci est cohérent avec la loi de Lenz. La première tige est accélérée par la force de Laplace et la deuxième freinée jusqu'à ce qu'elles se déplacent à la même vitesse.

Exercice 8 :

1- Le couple instantané vérifie :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = MB_0 \sin(\alpha + (\omega_0 - \omega)t)\,\vec{u}_z}$$

La valeur moyenne vérifie :

$$\langle\vec{\Gamma}\rangle = MB_0 \langle \sin(\alpha + (\omega_0 - \omega)t)\rangle \vec{u}_z$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } \omega = \omega_0 & \langle\vec{\Gamma}\rangle = MB_0 \sin\alpha\,\vec{u}_z \\ \text{Si } \omega \neq \omega_0 & \langle\vec{\Gamma}\rangle = \vec{0} \end{array}}$$

Le couple est non nul que si le rotor tourne à la même vitesse que le champ magnétique tournant.

2- La puissance mécanique vérifie : $\mathcal{P} = \langle\vec{\Gamma}\rangle \omega_0 \vec{u}_z$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } \omega = \omega_0 & \mathcal{P} = MB_0\omega_0 \sin\alpha \\ \text{Si } \omega \neq \omega_0 & \mathcal{P} = 0 \end{array}}$$

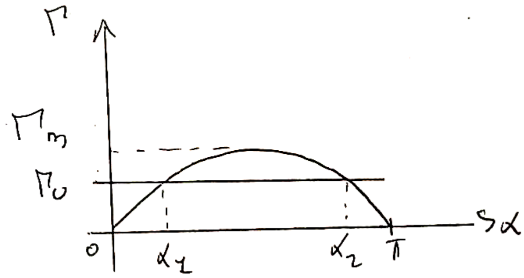
Pour avoir un moteur la puissance mécanique doit être positive ce qui implique que $\omega = \omega_0$ et $0 < \alpha < \pi$. Le rotor devant tournée à la même vitesse que le champ tournant, on parle de moteur synchrone.
Comme $0 < \alpha < \pi$, l'aimant suit le champ magnétique.
La puissance maximale est obtenue pour $\alpha = \pi/2$ et elle vaut :

$$\boxed{\mathcal{P}_m = MB_0\omega_0}$$

L'énergie provient du champ magnétique.

3- Le théorème du moment cinétique appliqué au rotor du moteur dans le référentiel laboratoire supposé galiléen et projeté sur l'axe z donne :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_u$$



En régime permanent la vitesse du rotor est constante donc : $\Gamma = \Gamma_u$
Graphiquement on remarque qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles cette dernière égalité est vérifiée.

4- Une position d'équilibre est stable si, le système ayant subi une petite perturbation, il revient à la position d'équilibre.
Cas $\alpha = \alpha_1$: - si l'équilibre est déplacé tel que $\alpha > \alpha_1$, alors graphiquement on observe que $\Gamma > \Gamma_u$. D'après le théorème du moment cinétique on en déduit que

$\frac{d\omega}{dt} > 0$, donc ω va augmenter et donc α diminuer. Le rotor est donc ramené à sa position d'équilibre.

- si l'équilibre est déplacé tel que $\alpha < \alpha_1$, alors graphiquement on observe que $\Gamma < \Gamma_u$. D'après le théorème du moment cinétique on en déduit que $\frac{d\omega}{dt} < 0$, donc ω va diminuer et donc α augmenter. Le rotor est donc ramené à sa position d'équilibre.

Cas $\alpha = \alpha_2$: - si l'équilibre est déplacé tel que $\alpha > \alpha_2$, alors graphiquement on observe que $\Gamma < \Gamma_u$. D'après le théorème du moment cinétique on en déduit que $\frac{d\omega}{dt} < 0$, donc ω va diminuer et donc α augmenter. Le rotor est donc éloigné de sa position d'équilibre. Cette position est un équilibre instable.

On en conclut que l'équilibre est stable pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

5- On a vu que pour que le couple moteur moyen soit non nul il faut que le rotor tourne à la même vitesse que le champ magnétique ce qui n'est possible que si, initialement, il a été entraîné par un autre moteur. Le moteur synchrone ne peut donc pas démarrer seul.

<u>Exercice 9 :</u>

On appelle C le centre du cadre. Comme l'axe z n'a pas d'origine précisée, on choisit O confondu avec C quand le cadre est à l'équilibre. On appelle z la coordonnées du point C en dehors de l'équilibre (z = 0 à l'équilibre).

On en déduit que le flux à travers le cadre orienté dans le sens trigonométrique :

$$\Phi = Ba\left(\frac{a}{2} - z\right)$$

D'où l'expression de la fem induite dans le cadre par la loi de Faraday :

$$e = Ba\dot{z}$$

On en déduit le courant induit dans le cadre :

$$i = \frac{aB}{R}\dot{z}$$

On calcule la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre et on obtient :

$$\vec{F}_L = -\frac{a^2B^2}{R}\dot{z}\,\vec{u}_z$$

Cette expression est cohérente avec la loi de Lenz puisque les conséquences de l'induction (courant induit et donc force de Laplace) doivent s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance (mouvement du cadre). En effet si le cadre monte ($\dot{z} > 0$) la force est vers le bas et si le cadre descend la force est vers le haut.

Un principe fondamental appliqué au cadre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et projeté sur l'axe z donne l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{z} + \frac{a^2B^2}{mR}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

Pour résoudre cette équation différentielle il faudrait connaître des valeurs numériques pour savoir si le régime est apériodique, critique ou pseudopériodique.

On peut quand même conclure que z tend vers zéro quand le temps vers l'infini, ce qui est cohérent avec la loi de Lenz puisque la force de Laplace est ici une force de freinage.