

Correction DM n°2

I-A-1) On appelle \underline{Z}_0 l'impédance équivalente du dipôle équivalent à R_0 en parallèle avec C_0 .
 \underline{Z}_0 vaut :

$$\underline{Z}_0 = \frac{R_0}{1 + jR_0C_0\omega}$$

Ensuite on applique un pont diviseur de tension sur le dipôle d'impédance et on obtient :

$$\underline{v} = \frac{\underline{Z}_0}{R_L + jL\omega + \underline{Z}_0} e$$

D'où la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \frac{R_0}{(R_L + jL\omega)(1 + jR_0C_0\omega) + R_0}$$

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_0}{R_0 + R_L}}{1 + j \frac{L + R_0R_LC_0}{R_0 + R_L} \omega - \frac{R_0}{R_0 + R_L} LC_0\omega^2}$$

On reconnaît un filtre passe-bas du deuxième ordre.

I-A-2) On peut donc écrire la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

avec : $H_0 = \frac{R_0}{R_0 + R_L}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{LR_0C_0}}$ et $\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{L + R_0R_LC_0}{R_0 + R_L}$, soit $Q = \frac{\sqrt{L(R_0 + R_L)R_0C_0}}{L + R_LR_0C_0}$

I-A-3) La résonance est définie comme la présence d'un maximum dans la courbe de gain.
 Il faut donc pour cela que $|1 + j.x/Q - x^2|$ présente un minimum ce qui est vérifié si :

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right) = 0$$

Ce qui implique que :

$$-4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0$$

Soit encore :

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

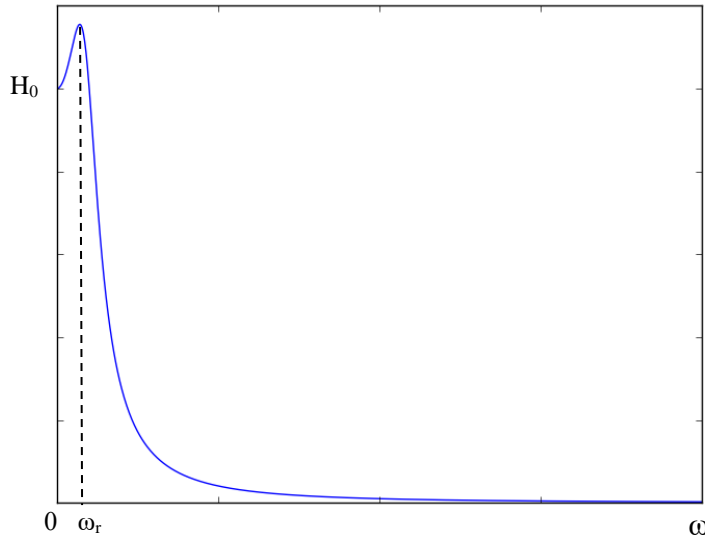
qui n'a de solution réelle que si $Q \geq 1/\sqrt{2}$

Et la pulsation de résonance vaut :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

I-A-4) Si on trace $|\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de la pulsation on obtient (dans le cas d'un résonance) :

$|\underline{H}(j\omega)|$



I-A-5) La pulsation de coupure ω_c est défini par la relation : $|\underline{H}(j\omega_c)| = H_{\max}/\sqrt{2}$

Ici $H_{\max} = H_0$ donc la pulsation de coupure vérifie : $|\underline{H}(j\omega_c)| = H_0/\sqrt{2}$

I-A-6) Si $Q \gg 1$ alors la pulsation de résonance vérifie $\omega_c \simeq \omega_0$. Pour la pulsation centrale le module de la fonction de transfert vaut $|\underline{H}(j\omega_0)| = H_0 Q = \frac{R_0}{R_0 + R_L} Q$.

Etant donné que $R_0 \gg R_L$ on a $|\underline{H}(j\omega_0)| = Q$

Sur le graphe on mesure à la résonance $|\underline{H}(j\omega_0)| = 90 \cdot 10^{-3} / 30 \cdot 10^{-3}$

On en déduit que $Q = 3$.

I-A-7) En supposant que le filtre se comporte comme un filtre passe-bande le facteur de qualité vérifie :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

où Δf est la largeur de la bande passante.

Sur le graphe on mesure : $f_0 = 7$ kHz.

On mesure les fréquences de coupures pour la tension $90 \cdot 10^{-3} / \sqrt{2} = 64$ mV

On en déduit que $\Delta f = 1,7$ kHz

On en déduit que $Q \simeq 4$.

I-A-8) D'après la question I-A-3-b), la fréquence propre du filtre vérifie :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{LR_0 C_0}}$$

On en déduit l'expression de l'inductance :

$$L = \frac{1}{4\pi^2} \frac{R_0 + R_L}{f_0^2 R_0 C_0}$$

AN : $L = 5$ H

Avec les approximations dues aux valeurs numériques l'expression du facteur de qualité de la question I-A-3-b) peut s'écrire :

$$Q = R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L}}$$

AN : $Q \simeq 4$

I-A-9) On retrouve bien le même ordre de grandeur, mais l'hypothèse pour trouver la valeur du facteur de qualité pour les deux premières méthodes ($Q \gg 1$) n'est pas vérifiée, ce qui rend les résultats discutables.

I-B-1-a) Le moment magnétique \vec{m} d'un circuit fermé plan est défini par la relation :

$$\vec{m} = i \cdot S \cdot \vec{n}$$

où S est la surface du circuit et \vec{n} le vecteur normal à cette surface et orienté par le sens de i.

I-B-1-b) Pour une spire circulaire le moment magnétique vaut :

$$\vec{m} = i \cdot \pi a^2 \cdot \vec{e}_y$$

I-B-1-c) La résultante des forces est la résultante des forces de Laplace :

$$\vec{F}_L = \oint_{(circuit)} i \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Comme i et le champ magnétique sont uniformes sur le circuit l'intégrale peut s'écrire :

$$\vec{F}_L = i \left(\oint_{(circuit)} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}_0$$

Or $\oint_{(circuit)} d\vec{l} = \vec{0}$ donc la résultante des forces est nulle.

I-B-1-d) L'action mécanique d'un champ magnétique uniforme sur un circuit fermé se traduit uniquement par un couple d'expression :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

I-B-2-a) Comme le dipôle magnétique de l'élément de corde se déplace (la corde vibre) le champ magnétique vu par la bobine varie. Le flux magnétique Φ_m à travers la bobine est donc variable. Il va apparaître une fem d'après la loi de Faraday $e = -d\Phi_m/dt$.

I-B-2-b) La loi des mailles donne :

$$e = (R_A + R_L)i + L \frac{di}{dt}$$

Soit encore :

$$-\frac{d\phi_m}{dt} = (R_A + R_L)i + L \frac{di}{dt}$$

I-B-2-c) D'après la loi d'Ohm : $u = R_A i$ et en multipliant l'équation précédente par R_A on obtient :

$$-R_A \frac{d\phi_m}{dt} = (R_A + R_L)u + L \frac{du}{dt}$$

On remarque que : $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d\phi_m}{dy} \frac{dy}{dt} = \dot{y} \frac{d\phi_m}{dy}$

En réinjectant dans l'équation précédente et en divisant par L on obtient :

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_L + R_A}{L} u = -\frac{R_A}{L} \dot{y} \frac{d\Phi_m}{dy}$$

I-B-3-a) En passant en notation complexe, l'équation différentielle s'écrit :

$$\left(j\omega + \frac{R_L + R_A}{L} \right) \underline{U} = -jK \frac{R_A}{L} Y_0 \omega$$

On en déduit l'expression de l'amplitude complexe de la tension u(t) :

$$\underline{U} = \frac{-jKR_A Y_0 \omega}{R_L + R_A + jL\omega}$$

D'où l'expression de son amplitude :

$$U = \frac{KR_A Y_0 \omega}{\sqrt{(R_L + R_A)^2 + L^2 \omega^2}}$$

et de sa phase :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R_L + R_A}\right)$$

b) Si l'entrée est sinusoïdale, la sortie l'est aussi puisque l'équation régissant le microphone est linéaire, donc il ne contient pas d'harmoniques.

I-B-4-a) On remarque que plus la distance entre la corde et le microphone augmente plus $\frac{d\Phi_m}{dy}$ diminue.

En effet plus la corde est loin, plus le champ généré par l'aimant est faible, donc le moment magnétique de la corde sera plus petit et aura encore moins d'influence sur la bobine puisqu'il sera plus éloigné. Ce phénomène est d'autant plus important au voisinage du microphone.

A partir de 6 mm, on peut considérer $\frac{d\Phi_m}{dy}$ comme constant à condition que la distance entre le micro et la corde ne varie pas au-delà du millimètre. Ce qui est à peu près vérifié pour une corde de guitare.

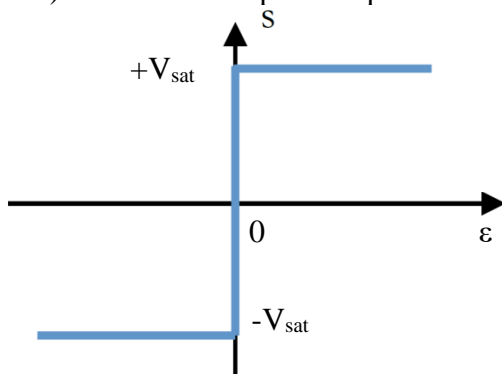
I-B-4-b) Le spectre représente les amplitudes des composantes du signal en fonction de la fréquence, il renseigne donc sur la fréquence et l'amplitude des composantes du signal.

I-B-4-c) La fréquence du fondamentale vaut 200 Hz.

I-B-4-d) La composante de fréquence 600 Hz est appelée harmonique de rang 3.

I-B-4-e) Le microphone ne restitue pas correctement le son émis par la corde puisqu'il modifie l'amplitude des composantes du signal. Par exemple les amplitudes des harmoniques de rang 5 et 7 sont plus faibles dans le son émis par la corde alors que c'est l'inverse pour le signal en sortie du microphone.

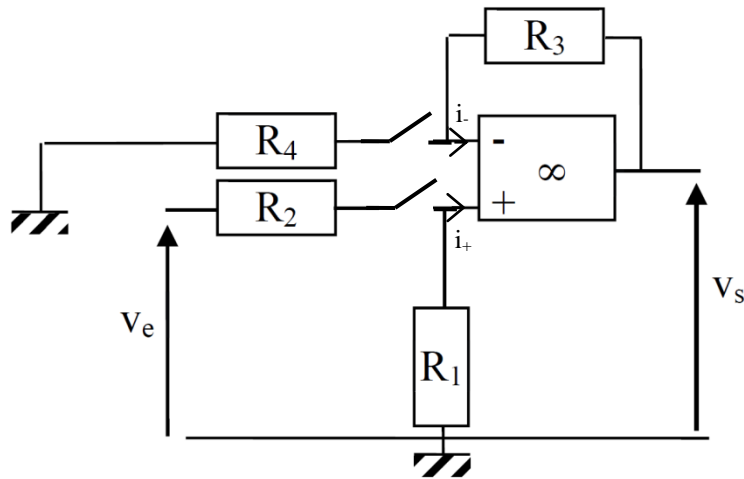
II-1-a) La caractéristique statique d'un amplificateur linéaire intégré idéal est :



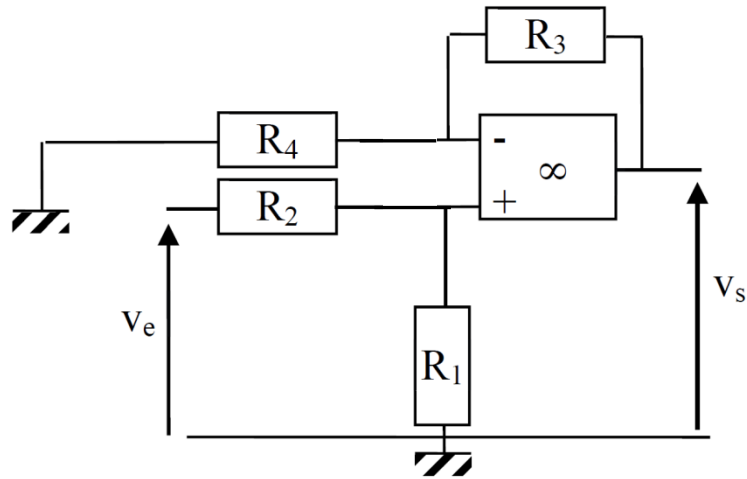
Pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$ on a la partie saturée : la sortie vaut $\pm V_{sat}$.

Pour $\varepsilon = 0$ on a le fonctionnement linéaire.

II-1-b) En basses fréquences les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, on a donc le schéma équivalent suivant :



En hautes fréquences les condensateurs se comportent comme des fils, on a donc le schéma équivalent suivant :



II-1-c) En basses fréquences $v_+ = -R_1 i_+$, or i_+ est nul puisque l'ALI est idéal.

On en déduit que $v_+ = 0$.

L'ALI fonctionne en régime linéaire donc $v_- = v_+ = 0$.

Comme $i_- = 0$, la tension aux bornes de R_3 est nulle ce qui implique que $v_s = 0$.

En hautes fréquences, i_+ étant nul, on peut appliquer un pont diviseur de tension :

$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_e$$

De même, i_- étant nul, on peut appliquer un autre pont diviseur de tension :

$$v_- = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_s$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire on a $v_+ = v_-$, d'où l'expression de v_s :

$$v_s = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_4(R_1 + R_2)} v_e$$

II-1-d) On en déduit qu'il s'agit d'un filtre passe-haut.

II-1-e) Pour établir l'expression de la fonction de transfert on utilise le même raisonnement qu'à la question précédente, en remplaçant R_4 par $R_4 + \frac{1}{jC_4\omega}$ et R_2 par $R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}$.

Les ponts diviseurs de tension donnent :

$$\underline{V}_+ = \frac{jR_1 C_2 \omega}{1 + j(R_1 + R_2) C_2 \omega} \underline{V}_e$$

$$\underline{V}_- = \frac{1 + jR_4 C_4 \omega}{1 + j(R_3 + R_4) C_4 \omega} \underline{V}_s$$

On en déduit que :

$$\underline{V}_s = \frac{jR_1 C_2 \omega}{1 + j(R_1 + R_2) C_2 \omega} \frac{1 + j(R_3 + R_4) C_4 \omega}{1 + jR_4 C_4 \omega} \underline{V}_e$$

D'où l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jR_1 C_2 \omega}{1 + j(R_1 + R_2) C_2 \omega} \frac{1 + j(R_3 + R_4) C_4 \omega}{1 + jR_4 C_4 \omega}$$

On retrouve la fonction de transfert demandée avec :

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_2}; \omega_2 = \frac{1}{(R_3 + R_4) C_4}; \omega_3 = \frac{1}{(R_1 + R_2) C_2}; \omega_4 = \frac{1}{R_4 C_4}$$

II-1-f) Le gain maximal est donné quand la pulsation tend vers l'infini ce qui donne :

$$H_{max} = \frac{R_1 (R_3 + R_4)}{R_4 (R_1 + R_2)}$$

D'où le gain en décibel :

$$G_{dBmax} = 20 \log \left(\frac{R_1 (R_3 + R_4)}{R_4 (R_1 + R_2)} \right)$$

AN : $G_{dBmax} = 26 \text{ dB}$

Ce qui correspond bien au gain maximal mesuré sur la courbe.

II-1-g) Pour mesurer la fréquence de coupure on relève la fréquence pour un gain égal à $G_{dBmax} - 3 \text{ dB} = 23 \text{ dB}$.

On trouve une fréquence de coupure $f_c = 70 \text{ Hz}$.

II-2-a) En régime permanent pour du continu, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. D'où le circuit équivalent :

Les résistances R_1 et R_3 sont équivalentes à des fils puisqu'elles sont traversées par des courants nuls (i_+ et i_- sont nuls pour un ALI idéal).

II-2-b) Par un pont diviseur de tension on obtient :

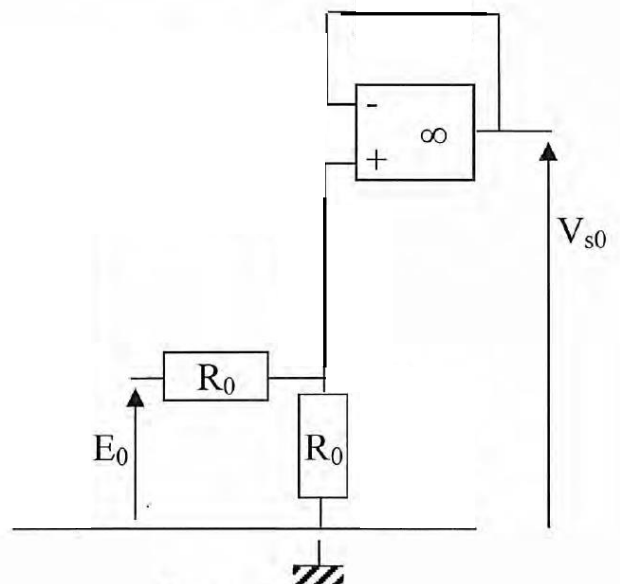
$$\underline{V}_{+0} = E_0 / 2$$

Et on reconnaît un montage suiveur pour l'ALI, ce qui implique que :

$$\underline{V}_{s0} = \underline{V}_{+0} = E_0 / 2$$

II-2-c) Pour que l'ensemble R_0 , R_1 et C_1 soit équivalent à la résistance R_1 pour des fréquences supérieures à 30 Hz, il faut que l'impédance équivalente du bloc contenant les deux résistances R_0 et le condensateur C_1 soit négligeable devant $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ dans ce domaine de fréquence.

L'impédance équivalente vaut :



$$Z_{eq} = \frac{R_0}{2 + jR_0C_1\omega}$$

Comme $R_0 = R_1$ alors $|Z_{eq}| \ll R_1 \Leftrightarrow \sqrt{4 + 4\pi^2 f^2} \gg 1$

Or pour $f = 30$ Hz, $\sqrt{4 + 4\pi^2 f^2} \approx 150$.

La condition est bien vérifiée.

II-2-d) Dans ce cas on se retrouve avec le filtre de la partie II-1) et en reprenant les résultats précédemment trouvés on obtient :

$$V_{+1} = \frac{jR_1C_2\omega}{1 + j(R_1 + R_2)C_2\omega} V_e$$

$$V_{s1} = \frac{jR_1C_2\omega}{1 + j(R_1 + R_2)C_2\omega} \frac{1 + j(R_3 + R_4)C_4\omega}{1 + jR_4C_4\omega} V_e$$

II-2-e) Les composants R_0 et C_1 constituent un filtre passe-bas de gain statique de $1/2$ et de fréquence de coupure égal à 1 Hz. Ils servent à filtrer les parasites autour de la tension continue.

II-2-f) En mode DC on observe la tension $v_s = V_{s0} + v_{s1}$, c'est-à-dire une tension sinusoïdale oscillant autour de la valeur moyenne V_{s0} .

En mode AC, on observe uniquement v_{s1} , une tension sinusoïdale alternative.

II-3-a) Pour un signal de $f = 10$ kHz le gain sera de $+26$ dB, puisque le signal a une fréquence dans la partie passante du filtre. Il sera donc multiplié par environ un facteur 20, ce qui portera son amplitude d'environ 300 mV à 6 V auquel il faut ajouter la composante continue de $E_0/2 = 4,5$ V. Si l'amplificateur était toujours linéaire, le signal oscillerait entre $1,5$ V et $11,5$ V. Or l'amplificateur ne peut délivrer une tension supérieure à 9 V, il va donc saturer périodiquement sur certains intervalles de temps.

II-3-b) La résistance R_4 intervient dans l'expression des pulsations ω_2 et ω_3 ainsi que dans l'expression du gain dans la bande passante. Modifier R_4 permet de régler la durée de l'intervalle de temps pendant lequel le signal sature et donc de contrôler l'effet.