TD 5 - Electromagnétisme

Propagation des ondes électromagnétiques

Questions de cours

Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

1. Quelle équation aux dérivées partielles est satisfaite par $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ dans le vide ? L'établir à partir des équations de Maxwell.
2. Donner la définition d'une onde scalaire plane, plane progressive, plane progressive harmonique.
3. Quelle est la solution générale de l'équation de d'Alembert scalaire en 1D ?
4. Citer les ordres de grandeur des différents domaines des ondes électromagnétique.
5. Définir le vecteur d'onde.
6. Quelle est la relation de dispersion dans le vide ?
7. Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ pour une OPPH ? Donner la relation de structure pour une OPP.
8. Quelle propriété énergétique possèdent les OPPH électromagnétique dans le vide ?
9. Exprimer le vecteur de Poynting pour une OPPH électromagnétique.
10. Définir la polarisation d'une onde., et la polarisation rectiligne. Donner un exemple d'onde non polarisée.
11. Montrer que sous certaines conditions (à préciser), on peut considérer un conducteur ohmique localement neutre et on peut négliger les courants de déplacement devant les courants libre.
12. Etablir les équations de propagation dans un conducteur ohmique.
13. Etablir la relation de dispersion dans un milieu ohmique. Interpréter l'expression de la grandeur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
14. Établir l'expression de l'onde réfléchie (pour $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$) sur un conducteur parfait en exploitant les relations de passage fournies pour une onde incidente (OPPH polarisée rectiligement) donnée.
15. En déduire les courants surfaciques apparaissant sur le conducteur parfait.
16. Définir une onde stationnaire. Déterminer les distances entre deux ventres consécutifs, deux noeuds consécutifs et un ventre et un noeud consécutifs.
17. Établir la condition de quantification des solutions dans une cavité résonante.

Exercices de cours - Savoirs-Faire

SF 1 - Reconnaître une direction de propagation, une polarisation rectiligne

On considère les ondes suivantes :

1. $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(\overrightarrow{u_x} - 2\overrightarrow{u_y})\cos(\omega t - kz + \varphi)$
2. $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{i\pi/2}(\overrightarrow{u_x} - 2\overrightarrow{u_y})e^{i(\omega t - kz)}$
3. $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{i\pi/2}(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_z})e^{i(\omega t - kx)}$
4. $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{i\pi/2}(\overrightarrow{u_x} - i\overrightarrow{u_y})e^{i(\omega t - kz)}$

1. Dans chacun des cas, indiquer la direction de propagation de l'onde, puis dire s'il s'agit d'une OPPM polarisée rectilignement ou non et si c'est le cas donner la direction de polarisation.
2. Dans le cas numéro 2, donner l'expression du champ électrique réel, et celle du champ magnétique.
3. Dans le cas numéro 4, donner l'expression du champ électrique réel. Montrer que la pointe du vecteur $\overrightarrow{E}$ décrit un cercle dans le plan Oxy. Dans quel sens ?
4. On considère l'onde donnée par $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(\overrightarrow{u_x} - \overrightarrow{u_y})\cos(\omega t - q(x+y))$
   Est-elle une onde plane ? On répondra en donnant l'équation des surfaces d'onde.
   Donner l'expression du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, ainsi que la direction de propagation.
   S'agit-il d'une polarisation rectiligne ? La direction de polarisation est-elle compatible avec celle de propagation ?

SF 2 - Relier les champs électromagnétique à l'énergie d'une onde

Le laser Mégajoule a été mis en service au Barp (Gironde) à la fin des années 1990 dans le but de simuler les effets des charges nucléaires en se passant désormais de véritables explosions. Il délivre des impulsions d'énergie $\mathcal{E} = 1,8$ MJ et de durée $\tau = 4$ ns. L'énergie des impulsions est focalisée sur une sphère de diamètre 2,4 mm.
Calculer l'ordre de grandeur des champs électrique et magnétique mis en jeu.

SF 3 - Coefficient de réflexion énergétique

On désire étudier la réflexion d'une onde plane progressive harmonique sur un conducteur parfait de manière énergétique.

1. Avec les conventions adoptées en cours, calculer le vecteur de Poynting moyen de l'onde incidente, puis celui de l'onde réfléchie.
2. Calculer le rapport R de leurs normes et interpréter. Ce rapport est nommé coefficient de réflexion en énergie.

Exercice phare

Exercice 1 - Loi de Malus

Sur un banc optique d'axe (Oz), on place successivement une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ ; un premier polariseur (P) d'axe passant $\overrightarrow{u}$; un second polariseur

(A) d'axe passant $\overrightarrow{v}$ appelé analyseur ; et un photodétecteur permettant de mesurer l'intensité de la lumière sortant de l'analyseur. La lumière dans le dispositif est décrite comme une onde plane progressive harmonique. Les directions passantes $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du polariseur et de l'analyseur forment un angle θ. On note $\overrightarrow{u_\perp}$ (resp. $\overrightarrow{v_\perp}$) le vecteur unitaire tel que la base $\mathcal{B}_P = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_\perp}, \overrightarrow{e_z})$ soit orthonormée directe (resp. $\mathcal{B}_A = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_\perp}, \overrightarrow{e_z})$).

1. Faire un schéma du montage.
2. Donner l'expression dans la base $\mathcal{B}_P$ du champ $\overrightarrow{E}_P$ ayant traversé le polariseur en fonction de z, t et λ.
3. Exprimer $\overrightarrow{E}_P$ dans la base $\mathcal{B}_A$. En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{E}_{PA}$ ayant traversé successivement le polariseur et l'analyseur puis celle du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}_{PA}$.

L'intensité lumineuse mesurée par le photodétecteur est définie comme étant la valeur moyenne (spatiale et temporelle) du flux du vecteur de Poynting sur toute la surface S du photodétecteur :

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} \right\rangle$$

où le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est normal au photodétecteur.

4. Montrer que l'intensité peut s'écrire sous la forme $I = I_0 \cos^2 \theta$. Cette relation est appelée loi de Malus.

Exercice 2 - Voile solaire

Une voile solaire est un dispositif de propulsion permettant de se déplacer dans l'espace à la manière d'un voilier. Les photons émis par le Soleil entrent en collision avec la voile et lui cèdent leur quantité de mouvement, ce qui lui permet d'avancer. Compte tenu de la faible propulsion générée, le procédé ne permet pas de quitter la surface d'une planète (même dénuée d'atmosphère, et donc de friction). Il est en revanche utilisable sur un appareil ayant déjà atteint la vitesse de satellisation minimale, voire la vitesse de libération. Plusieurs prototypes de petite taille ont déjà été placés en orbite ou sont en cours de développement.
On considère une voile solaire de surface S modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de polarisation rectiligne. On suppose que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPM.

1. Proposer une expression du champ électrique complexe de l'OPPM incidente sur la voile. En déduire l'onde réfléchie.
2. Calculer la densité surfacique de courant sur la voile.
3. Proposer une expression pour la force surfacique moyenne à laquelle est soumise la voile et la calculer. Commenter sa direction et son sens.

Données :

- ▷ les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait ;
- ▷ relations de passage à l'interface entre deux milieux (1) et (2), de normale $\overrightarrow{n}$ orientée de (1) vers (2) :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{n} \qquad \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n} \qquad \mu_0 \overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})$$

où σ et $\overrightarrow{j_s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Exercices en plus

Exercice 3 - Onde sphérique

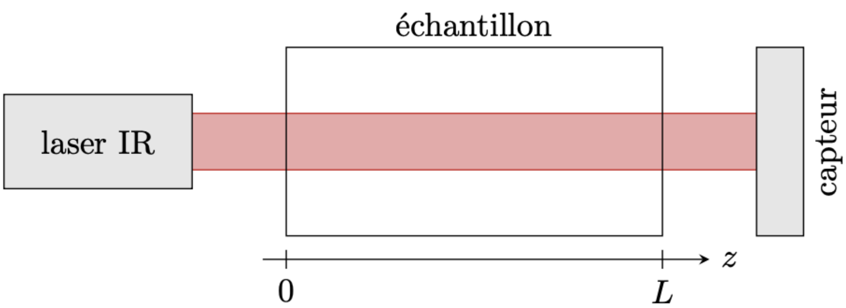
Exercice simple, mais sur une notion hors programme (onde sphérique)
On considère un émetteur isotrope d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{u_\theta}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1. Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ de l'onde sphérique.
2. On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.
3. Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.
4. Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = A/r$ avec A une constante à déterminer.

Exercice 4 - Mesure de la concentration en CO_2 atmosphèrique

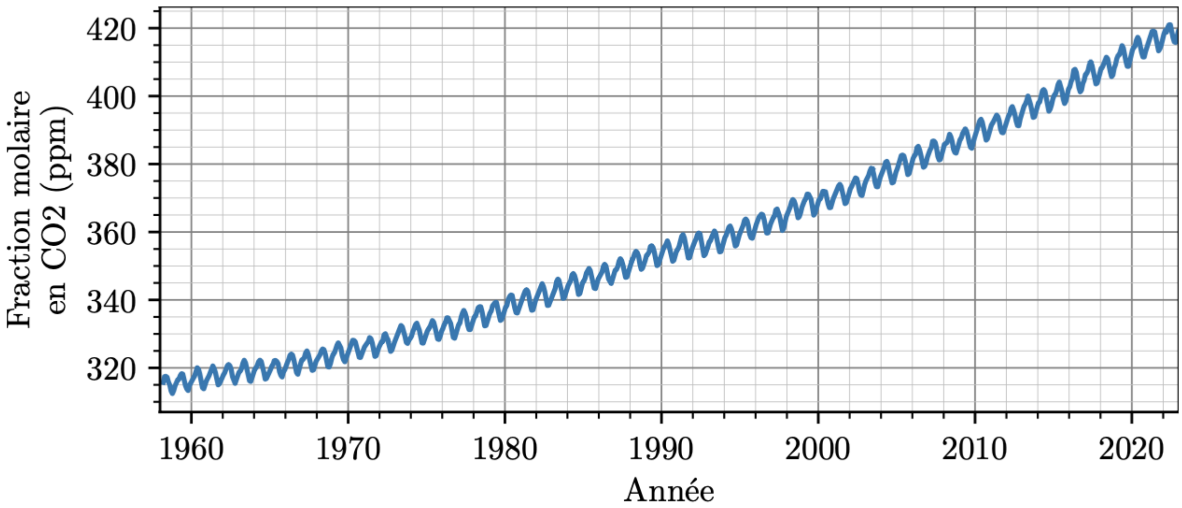
Le développement de modèles climatiques et l'actualisation de leurs prédictions nécessite des mesures précises de la fraction molaire en CO_2 présent dans l'atmosphère. Celle-ci est usuellement exprimée en parties par millions (ppm) : une fraction molaire de 413 ppm indique par exemple qu'un million de molécules d'air contient en moyenne 413 molécules de CO_2.

Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude et loin de toute perturbation humaine, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé. Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde 4,26 μm, à laquelle le spectre d'absorption du CO_2 présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO_2, en nombre de molécules par m^3 d'air. Les capteurs de CO_2 popularisés comme indicateurs de la qualité de l'air lors de la crise du Covid-19, fonctionnent sur le même principe, mais avec des exigences de précision bien moindre.



1. On modélise le faisceau laser par un cylindre de section S au sein duquel se propage une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne selon $\overrightarrow{u_x}$. Écrire le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting de l'onde.

2. Les capteurs utilisés sont sensibles à l'intensité du faisceau, définie comme une double moyenne spatiale et temporelle du vecteur de Poynting sur toute la section S du faisceau : $I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} \right\rangle$ Relier I à l'amplitude du champ électrique de l'onde.
3. Chaque molécule de CO_2 se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance p proportionnelle à l'intensité : $p = \sigma I$, où σ est une constante tabulée dépendant uniquement de la longueur d'onde. En raisonnant sur une tranche infinitésimale du faisceau, montrer que l'intensité vérifie l'équation différentielle $\frac{dI}{dz} + \sigma n I = 0$, où n est la densité volumique de CO_2, c'est-à-dire le nombre de molécules de CO_2 par unité de volume dans l'échantillon.
4. On appelle absorbance de l'échantillon le rapport $A = \ln \frac{I(z=0)}{I(z=L)}$ Montrer que la connaissance de l'absorbance permet de remonter à n.
5. En pratique, on procède à température et pression parfaitement contrôlées et par comparaison avec des échantillons étalons de concentration connues. Expliquer ces choix expérimentaux.
6. La figure ci-dessous représente l'évolution temporelle de la fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire situé au sommet du volcan de Mauna Loa, à Hawaï. Proposer une interprétation aux tendances observées.



Fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire de Mauna Loa. Les mesures représentées sont des moyennes mensuelles.

Exercice 5 - Blocage d'appel

Très proche du cours

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : ce dernier ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

1. Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.

3. Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$, avec $\underline{k}$ complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?
4. Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience.

Exercice 6 - Communication avec un satellite

Vers les plasmas : proche des équations du milieu ohmique, mais un peu plus compliqué
Pour communiquer depuis la Terre avec un satellite en orbite, les ondes électromagnétiques doivent traverser l'atmosphère. Celle-ci peut être assimilée au vide en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques, à l'exception d'une couche située entre 60 et 800 km : l'ionosphère.
Sous l'influence du rayonnement solaire, l'air présent dans l'ionosphère s'ionise et devient un plasma, contenant des cations (masse m_c et charge $+e$) et des électrons (masse m_e et charge $-e$) avec une même densité volumique n. Ces charges sont soumises à l'action de l'onde électromagnétique.
On considère une onde transverse de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{e_x}$, et on cherche à déterminer son devenir quand elle pénètre dans l'ionosphère.

1. Dans quelle direction se propage cette onde ? Quelle est sa polarisation ? Exprimer le champ magnétique associé dans le vide.
2. Exprimer la force de Lorentz subie par une charge q en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}$. À quelle condition sur v est-il possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique ? On suppose cette condition remplie par la suite.
3. On note respectivement $\overrightarrow{v_c}$ et $\overrightarrow{v_e}$ les vitesses des cations et des électrons. Partant du principe fondamental de la dynamique, montrer que $\dfrac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} = ne^2 \left(\dfrac{1}{m_e} + \dfrac{1}{m_c} \right) \overrightarrow{E}$
4. Rappeler l'ordre de grandeur de la masse d'un proton, en déduire celle de la masse d'un cation. Comparer à la masse d'un électron. En déduire une simplification de l'expression précédente.
5. Montrer que le champ électrique vérifie l'équation de propagation suivante (appelée équation de Klein-Gordon) $\Delta \overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \dfrac{\omega_P^2}{c^2} \overrightarrow{E}$, avec ω_P une pulsation caractéristique appelée pulsation plasma, à exprimer en fonction des données du problème.
6. Établir la relation de dispersion du plasma.
7. Exprimer le champ électrique de l'onde si $\omega < \omega_p$. On introduira une longueur caractéristique δ. L'onde peut-elle traverser l'ionosphère ? Qu'en est-il si $\omega > \omega_p$?
8. Les satellites GPS émettent dans deux étroites bandes de fréquences centrées sur 1227 MHz et 1575 MHz. Commenter ce choix sachant que la pulsation plasma de l'ionosphère est de l'ordre de 1.10^7 rad/s.

Exercice 7 - Onde électromagnétique confinée

On rappelle que les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{n_{1\to 2}} \qquad \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}} \qquad \mu_0 \overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{n_{1\to 2}} \wedge (\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})$$

où σ et $\overrightarrow{j_s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1. On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\overrightarrow{\underline{E}_i} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{e_x}$. Montrer que $\omega = kc$.
2. On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour $\overrightarrow{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.
3. En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.
4. Qu'impliquent les relations de passage pour $\overrightarrow{B}$? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

5. Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.
6. Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = cste$?

Exercice 8 - Guide d'ondes

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$, est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = f(x) e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{u_y}$$

1. Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k.
2. Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c à exprimer.
3. On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, possédant plusieurs modes propagatifs ?
4. Le champ magnétique dans le guide s'écrit

$$\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{u_x} + i \frac{n\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{u_z}.$$

Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.

Exercices pour aller plus loin ⋆⋆⋆

Exercice 9 - Approche énergétique de l'effet de peau

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\overrightarrow{\underline{E}} = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \overrightarrow{u_x}$$

1. S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?

2. Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ associé.
3. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.
4. Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur dz. Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.
5. Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.
6. À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Exercice 10 - Réflexion de la lumière sur un métal réel

Considérons une onde électromagnétique provenant de $-\infty$ de la forme $\overrightarrow{\underline{E_i}} = E_0 \exp(j(\omega t - kz))\overrightarrow{e_x}$ et arrivant en $z = 0$ sur un métal de conductivité $\sigma \simeq 5,7.10^7$ S/m (non considéré comme infini).
Cette onde donne naissance à :

- ▷ une onde réfléchie (se propageant selon $-\overrightarrow{e_z}$ dans l'espace $z < 0$) de la forme $\overrightarrow{\underline{E_r}} = \underline{r}E_0 \exp(i(\omega t + kz))\overrightarrow{e_x}$;
- ▷ une onde transmise (se propageant selon $+\overrightarrow{e_z}$ dans l'espace $z > 0$) de la forme $\overrightarrow{\underline{E_t}} = \underline{t}E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}_t z))\overrightarrow{e_x}$ avec $\underline{k}_t = \dfrac{1-j}{\delta}$ ($\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ est l'épaisseur de peau)

1. Déterminer les champs magnétiques complexes associées à cette onde. On posera $\alpha = \sqrt{\dfrac{2\omega\epsilon_0}{\gamma}}$.
2. Comme le modèle adopté ici est réaliste (métal réel), il n'y a pas de courant surfacique. Traduire les relations de passage des champs.
3. En déduire l'expression de $\underline{r}$ et $\underline{t}$. Vers quelles valeurs tendent-ils dans le cas d'un conducteur parfait ?
4. Calculer α pour une fréquence hertzienne $f \simeq 320$ MHz et en déduire l'expression appochée, au premier ordre en α du coefficient de réflexion $\underline{r}$ (sous la forme $a + ib$). Quel est alors le déphasage de l'onde réfléchie sur l'onde incidente ? Montrer que tout se passe comme si l'onde incidente faisait un aller-retour dans le métal à la célérité dans le vide sur une profondeur z_P à déterminer. Interpréter.
5. Calculer les trois vecteurs de Poynting moyens en $z = 0$, puis définir et exprimer en fonction de α (sans le supposer petit) les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Établir et expliquer la relation simple entre R et T. Montrer que l'expression approchée de T, compte tenu du fait que $\alpha \ll 1$, s'exprime très facilement en fonction de α. A.N. pour $f \simeq 320$ MHz. Commenter.