TD 3 - Electromagnétisme

Équations de Maxwell

Questions de cours

Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

1. Donner l'expression du rotationnel et de la divergence en coordonnées cartésiennes.

2. Que peut-on dire du rotationnel d'un gradient ?

3. Que peut-on dire de la divergence d'un rotationnel ?

4. Énoncer le théorème de Stokes.

5. Énoncer le théorème de Green-Ostrogradski.

6. Énoncer les équations de Maxwell (avec leurs noms respectifs).

7. Démontrer la forme globale de chacune des équations de Maxwell.

8. Définir l'ARQS magnétique. Que peut-on appliquer dans cette approximation ?

9. Énoncer l'équation de conservation de la charge. La démontrer en 1D cartésienne par un bilan et en 3D via l'équation de Maxwell Ampère.

10. Que deviennent les équations de Maxwell en régime stationnaire ?

11. Définir le laplacien scalaire d'un champ scalaire.

12. Énoncer et démontrer l'équation de Poisson. Que devient-elle dans le vide ?

Exercices de cours - Savoirs-Faire

SF 1 - Manipuler les opérateurs d'analyse vectorielle

On se place en régime stationnaire. Une sphère de centre O et de rayon R contient une densité volumique de charges uniforme ρ_0. Dans le chapitre EM1, on a établi l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace grâce à l'application du théorème de Gauss. En utilisant l'équation locale à laquelle satisfait le champ électrique, retrouver l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.

On donne en coordonnées sphériques $\operatorname{div}(\overrightarrow{A}) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

SF 1 bis

On considère le champ électrique donné par $\overrightarrow{E} = E_0 \dfrac{x}{a} \overrightarrow{u_x}$ pour $-a \leq x \leq a$, $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u_x}$ pour $x > a$ et $\overrightarrow{E} = -E_0 \overrightarrow{u_x}$ pour $x < -a$.

Déterminer la densité volumique de charge ρ à l'origine de ce champ électrique.

Exercice phare

Exercice 1 - Diode à vide

On considère une diode à vide constituée de deux plans métalliques $x = 0$ et $x = a$ de surface d'aire S. Le plan métallique $x = 0$ émet des électrons par effet thermoélectrique. La vitesse d'émission de ces électrons sera considérée comme négligeable en $x = 0^+$. On installe entre les deux conducteurs une différence de potentiel $U = V(a) - V(0) > 0$: ainsi se crée dans le vide situé entre les deux conducteurs un courant d'électrons. Dans tout l'exercice, on néglige les « effets de bord ». On considèrera en outre que le régime stationnaire est établi : on notera alors $\overrightarrow{j}(M) = j(x)\overrightarrow{u_x}$ le vecteur densité de courant, $V(x)$ le potentiel électrique (on prendra $(V(0) = 0)$, $\rho(x)$ la densité volumique de charge et $\overrightarrow{u}(M) = u(x)\overrightarrow{u_x}$ la vitesse des électrons.
On notera I l'intensité traversant la diode en convention récepteur.

1. Que peut-on dire de la dépendance en x de $j(x)$? Préciser la relation entre I et j.
2. Préciser les relations existant entre j, ρ et u, puis entre u et V et enfin entre ρ et V.
3. Déduire des relations précédentes une équation différentielle du second ordre en $V(x)$ faisant intervenir I et des constantes.
4. Montrer que $V(x) = Ax^n$ est une solution acceptable. Préciser alors n.
5. Déterminer enfin l'expression de la caractéristique de la diode $I = f(U)$.

Exercices en plus

Exercice 2 - Sphère radioactive

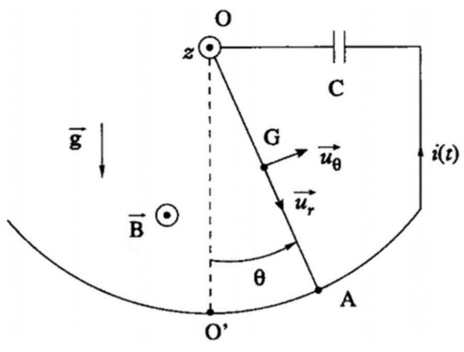
Une sphère radioactive, de centre O et de rayon R, suffisamment faible pour qu'on puisse considérer la sphère ponctuelle, possède à $t = 0$ une charge $Q_0 < 0$ et elle émet des électrons de manière isotrope : le nombre d'électrons émis par unité de temps est α et les électrons sont émis avec une vitesse $v_0\overrightarrow{u_r}$. Pour simplifier, on néglige les forces électromagnétiques subies par les électrons après leur émission : leur vitesse reste donc constante.
On note $Q(r,t)$ la charge contenue à l'instant t dans une sphère de rayon r.

1. Déterminer l'expression de $Q(r,t)$. Distinguer $r > v_0 t$ et $r < v_0 t$.
2. Calculer le vecteur densité de courant volumique $\overrightarrow{j}(r,t)$ et la densité volumique de charge $\rho(r,t)$.
3. Calculer le champ électrique et le champ magnétique à la distance r du centre de la sphère radioactive.
4. Vérifier que les champs calculés vérifient les équations de Maxwell sur cet exemple.

Exercice 3 - Pendule soumis à une force de Laplace

Exercice d'induction, faisable dès la PTSI :)

Une tige métallique homogène OA, de masse m et de longueur ℓ, peut tourner autour d'un axe horizontal (Oz). La liaison au niveau de son extrémité fixe O est considérée comme parfaite.
L'extrémité mobile A glisse sans frottement sur un profil circulaire, de sorte qu'à chaque instant l'ensemble tige-profil circulaire assure la fermeture d'un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C, de la tige OA et de fils électriques.
L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et constant : $\overrightarrow{B} = B\vec{u}_z$ dirigé suivant l'axe de rotation (Oz).



1. Justifier qualitativement l'apparition du courant $i(t)$. Expliquer le fonctionnement du système.
2. Déterminer, dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ l'expression de la force de Laplace $\overrightarrow{F}_L$ s'exerçant sur la tige mobile. Quel est son point d'application ?
3. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_L$ de la force de Laplace en fonction de B, ℓ, $\dot{\theta}$ et $i(t)$.
4. En utilisant la relation de couplage électromécanique, déterminer la force électromotrice d'induction e qui apparaît dans le circuit.
5. On néglige les chutes de tension dans les parties résistives du circuit ainsi que tout phénomène d'autoinduction. Représenter le schéma électrique équivalent et montrer que l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit s'écrit

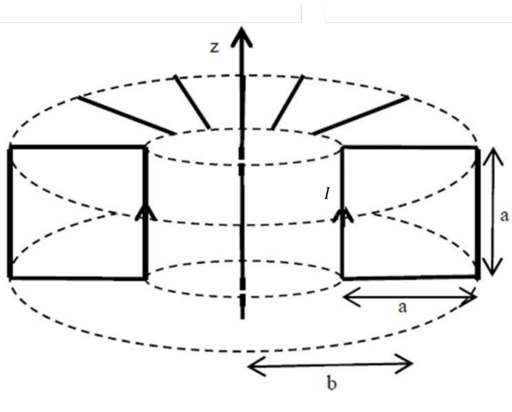
$$i(t) = \frac{CB\ell^2}{2}\ddot{\theta}$$

6. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Oz) est $J_{(Oz)} = \frac{1}{3}m\ell^2$. En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation du mouvement de la tige.
7. En déduire que la pulsation des petites oscillations de la tige s'écrit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{\frac{2}{3}m\ell + \frac{1}{2}CB^2\ell^3}}$$

Exercice 4 - Pince ampèremétrique

Un solénoïde torique de rayon moyen b est constitué de spires carrés de côté a. Il comprend N spires. Sa résistance est r.



1. Avec une étude des symétries et l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique créé par le tore dans tout l'espace lorsque celui-ci est parcouru par un courant I.
2. En déduire le flux du champ magnétique du tore à travers une spire du tore, puis à travers toutes les spires du tore.

3. On place sur l'axe (Oz) du tore un fil droit parcouru par un courant i. Quel est le flux du champ magnétique créé par le fil à travers toutes les spires du tore ? Commenter le résultat.

On suppose que l'intensité du courant du fil varie et vaut $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ avec $I_0 = 1$ A et une fréquence de 50 Hz. Le tore, lui, n'est relié à aucun générateur.

4. Donner la définition de l'inductance mutuelle M entre deux circuits et de l'inductance propre L d'un circuit. Montrer que l'inductance propre de la bobine torique et l'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique s'écrivent :

$$\begin{cases} L = \dfrac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b+\frac{a}{2}}{b-\frac{a}{2}}\right) \\ \\ M = \dfrac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b+\frac{a}{2}}{b-\frac{a}{2}}\right) \end{cases}$$

   Commenter ces expressions, en particulier la valeur du rapport $\frac{L}{M}$.

5. Calculer l'intensité complexe $\underline{i}_{\text{ind}}(t)$ du courant dans la bobine en régime sinusoïdal forcé (régime imposé par le fil central, toujours parcouru par $i(t)$).
6. Que devient le rapport $\left|\frac{\underline{i}_{\text{ind}}}{\underline{i}}\right|$ lorsque $L\omega \gg r$.

On donne $N = 10000$, $b = 6$ cm, $a = 1$ cm, $f = 50$ Hz, $r = 0,2\Omega$.

7. Pourquoi peut-on qualifier le dispositif de transformateur de courant ? Pourquoi est-ce un appareil très utilisé pour la mesure des forts courants ?

Exercice 5 - Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire à proximité de son axe

On considère une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Oz, parcourue par le courant I.

1. (a) Montrer que le champ magnétique en un point M de son axe peut s'écrire sous la forme :
$$\vec{B}(M) = B_0(z)\vec{u}_z$$
   (b) Discuter de la parité de $B_0(z)$.
2. Le but de cette question est d'exprimer le champ magnétique en un point M', à la cote z mais à une distance r de l'axe (r est faible par rapport à R mais $r \neq 0$).
   (a) Montrer que : $\vec{B}(M') = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z$.
   (b) En utilisant la forme locale de l'équation de Maxwell-flux, montrer que le champ magnétostatique en M' peut s'écrire pour $r \ll R$:
$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}$$
   (c) Retrouver ce résultat grâce à la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-flux. On considérera, pour évaluer le flux du champ magnétique, une surface S fermée, formée de la surface latérale Σ_{lat} du cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur dz, fermée à ses extrémités par deux disques D_1 en z et D_2 en $z + dz$.

Exercice pour aller plus loin ⋆⋆⋆

Exercice 6 - Problème de Laplace en géométrie cylindrique

Assez calculatoire

On considère un cylindre conducteur d'axe Oz et de rayon R maintenu au potentiel nul et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u_x}$. Il se produit un phénomène d'« influence », qui amène un déplacement des charges dans le conducteur et la production d'une électrisation superficielle. Le champ créé par le cylindre s'ajoute au champ extérieur. On recherche ici, à l'équilibre, l'expression du potentiel et du champ électrique total, ainsi que la distribution des charges sur le cylindre.
On donne

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

1. Examiner les symétries et invariances (le cylindre est infini selon Oz).
2. Quelle est l'équation locale satisfaite par le potentiel V en tout point à l'extérieur du cylindre ? On se propose de chercher si une solution de la forme $V = f(r)g(\theta)$ (produit de deux fonctions d'une variable) convient. Montrer qu'il existe alors une constante K telle que $K = r\frac{f'}{f} + r^2\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$
3. Chercher g sous la forme $g = cos\theta$ et en déduire K. Chercher alors une solution pour f sous la forme $f = r^n$. En déduire une relation entre K et n, donc les valeurs de n. Montrer que l'expression $V(r,\theta) = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\cos(\theta)$ convient.
4. On s'intéresse à la solution dans l'espace extérieur au cylindre. A l'aide des conditions aux limites, déterminer A et B en fonction de E_0 et R.
5. Exprimer le champ électrique total à l'extérieur du cylindre. Esquisser la carte de ligne de champ dans le plan xOy.
6. Déterminer l'expression de la densité surfacique de charge σ.

Exercice 7 - Effet Meissner dans un plaque supraconductrice

Dans un matériau supraconducteur, il existe une densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ liée au champ magnétique $\overrightarrow{B}$ par la relation $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\overrightarrow{B}$ (appelée équation de London) où λ est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. Déterminer l'équation au dérivées partielles satisfaites en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique $\overrightarrow{B}$.
2. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$, dont les faces sont de dimensions très grandes devant d pour pouvoir négliger les effets de bord. On choisit l'origine d'un repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de la plaque, l'axe Oz étant perpendiculaire à ses faces qui ont pour équation $z = -d$ et $z = +d$. Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme, égal à $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_x}$.

(a) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur de la plaque en supposant que $\overrightarrow{B}(d) = \overrightarrow{B}(-d) = \overrightarrow{B_0}$.

(b) En déduire le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ à l'intérieur de la plaque

3. Un modèle microscopique donne $\lambda = \dfrac{m}{\mu_0 n_S e^2}$ où m est la masse de l'électron, e la charge élémentaire et n_S la densité volumique d'électrons supraconducteurs.
On donne : $m = 9.110^{-31}$ kg et $e = 1.6.10^{-19}$ C.

(a) Calculer λ pour $n_S = 1.0.10^{-29}$ m^{-3}.

(b) Tracer les graphes des composantes non nulles de $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{j}$ en fonction de z.

(c) Calculer l'épaisseur minimale $2d_m$ de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à $B_0/100$.

(d) Pour $d \gg \lambda$, à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface ?