TD 1 - Electromagnétisme

Champ électrostatique

Questions de cours

Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

1. Donner l'expression de l'interaction de Coulomb.

2. Comment définit-on le champ électrique ?

3. Définir la densité volumique de charge. Comment calcule-t-on la charge contenue dans un volume donné ?

4. Dans quel cas définit-on des densités surfacique ou linéique de charge ? Quel lien existe-t-il avec la densité volumique de charge ?

5. Définir plan de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de charge. Quelles informations peut-on en déduire pour le champ électrique ? On fera un schéma clair.

6. Quelles informations les invariances de la distribution de charge permettent-elles d'avoir sur le champ électrique ?

7. Donner le théorème de Gauss et l'appliquer pour trouver le champ électrique créé par (au choix du colleur) une sphère uniformément chargé en volume, un cylindre infini uniformément chargé en volume ou un plan infini uniformément chargé en surface.

8. Expliciter les analogies entre force gravitationnelle et force de Coulomb. En déduire le théorème de Gauss gravitationnel.

9. Définir le potentiel électrostatique.

10. Définir la circulation d'un champ vectoriel.

11. Quel est le lien entre la circulation du champ électrostatique et le potentiel ?

12. Déterminer l'expression du champ d'un condensateur plan infini.

13. Définir la capacité de deux surfaces en influence totale. Établir l'expression de la capacité d'un concensateur plan infini.

14. En partant de l'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur, déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique

15. Définir une ligne de champ, un tube de champ et une surface équipotentielle. Que peut-on dire sur les propriétés relatives de ces objets topographiques ?

16. Que peut-on dire sur le champ électrique lorsqu'un tube de champ se resserre ? Justifier.

Exercices de cours - Savoirs-Faire

SF 1 - Déterminer un champ électrostatique par le théorème de Gauss

Calculer le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, puis par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume et enfin par un plan infini uniformément chargé en surface.

SF 2 - Appliquer le théorème de Gauss gravitationnel

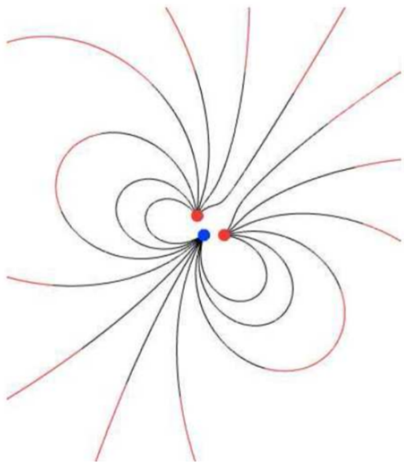
On considère un premier modèle pour la Terre : une sphère de masse volumique uniforme. Calculer le champ gravitationnel créé en tout point M.

Un deuxième modèle propose de considérer que le noyau de la Terre a un rayon R_N et une masse volumique ρ_N, puis le manteau et la croûte ont un rayon $R_M > R_N$ et une masse volumique ρ_M.Calculer le champ gravitationnel créé en tout point M.

SF 3 - Analyser une carte de champ

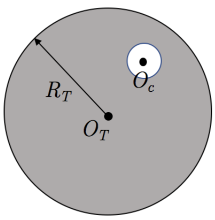
On étudie la molécule d'eau. Les lignes de champ électrique créé par cette molécule sont représentées ci-dessous.

1. Repérer l'atome d'oxygène, en le justifiant.
2. Flécher les lignes de champ.
3. Tracer un réseau d'équipotentielles.



Exercice phare

Exercice 1 - Cavité



La Terre est assimilée à une boule sphérique de centre O_T et de rayon R_T, de masse volumique ρ. La cavité est sphérique de centre O_c et de rayon R_c.

Déterminer le champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M)$ dans la cavité.

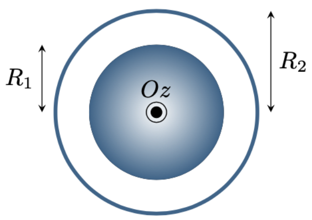
Exercice 2 - Condensateur cylindrique

Considérons un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales. L'armature interne, de rayon R_1, supposée de potentiel nul, porte une charge -Q. L'armature externe, de rayon R_2, porte une charge $+Q$. Les deux armatures sont de même longueur $\ell \gg R_2$. On supposera les effets de bord négligeables.

1. Justifier précisément la direction et le sens du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, ainsi que la (les) variable(s) dont il dépend.
2. Calculer le champ électrostatique dans tout l'espace.
3. En déduire le potentiel électrostatique dans tout l'espace.
4. Déterminer la capacité C du condensateur.

Exercices en plus

Exercice 3 - Cylindres concentriques



On considère une distribution de charge constituée de deux cylindres concentriques infinis de même axe Oz. Le premier cylindre, de rayon R_1, est un cylindre plein chargé en volume par une densité de charge $\rho(r) = -\alpha r$ ($\alpha > 0$, $r \leq R_1$). Le second cylindre, de rayon $R_2 > R_1$ est un cylindre creux chargé uniquement sur son pourtour extérieur avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

1. Calculer le champ électrique créé par cette distribution.
2. Étudier la continuité de $\overrightarrow{E}$ en $r = R_1$ et $r = R_2$. Commenter.
3. Représenter sa composante non nulle en fonction de r.

Exercice 4 - Plan épais

On considère une couche épaisse, comprise entre les deux plans d'équation $z = -a/2$ et $z = +a/2$ et infinie dans les directions x et y, chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charge ρ_0.

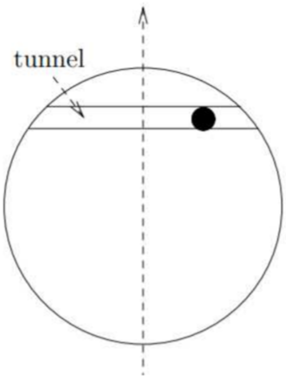
1. Déterminer la direction et la dépendance du champ $\overrightarrow{E}$.
2. Calculer le champ créé par la distribution dans tout l'espace en utilisant le théorème de Gauss.
3. Que vaut le champ dans le plan (xOy) ? Interpréter par des arguments de symétrie.
4. Tracer le graphe représentant $E_z(z)$ pour $\rho_0 > 0$. Commenter le comportement de $\overrightarrow{E}$ en $z = \pm a/2$ où la densité de charge est discontinue.

Considérons maintenant que la couche est d'épaisseur très fine : $a \to 0$. On cherche à la décrire par une distribution surfacique de charge σ_0 uniforme à partir des résultats précédentes.

5. Exprimer la densité surfacique de charge σ_0 en fonction de ρ_0 et a. Que devient le champ électrique dans chaque demi-espace ?
6. Commenter le comportement de $\overrightarrow{E}$ au passage du plan chargé.

Exercice 5 - Tunnel dans la Terre

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R = 6400$ km. Un tunnel rectiligne, de faible section, est creusé entre deux points de la surface de la Terre. Une masse m ponctuelle est libre de se déplacer dans ce tunnel ; les frottements sont négligés. On note g_0 l'intensité de la pesanteur au niveau du sol.



1. Déterminer le champ gravitationnel terrestre à l'intérieur du tunnel.
2. Décrire le mouvement de la masse.
3. Comment les résultats précédents sont-ils modifiés si l'on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même ?

Exercice 6 - Nuage d'orage

Dans un modèle très simple de situation orageuse, on considère que la Terre, supposée localement électriquement neutre, occupe le demi-espace des $z < 0$. Des charges positives sont réparties uniformément avec la densité volumique de charge ρ_0 au voisinage de la surface de la Terre dans une couche comprise entre $z = 0$ et $z = z_0$.

Le nuage d'orage occupe quant à lui la partie d'espace situé entre $z_1 > z_0$ et z_2. Il présente une densité volumique de charge $\rho(z)$ variant linéairement avec z et vérifiant $\rho(z_1) = -\rho_1$ et $\rho(z_2) = \rho_1$ avec $\rho_1 > 0$.
On néglige les effets de bords : cela revient à considérer les distributions comme infinies dans les directions orthogonales à l'axe montant (Oz).

On suppose $E_z(z = 0) = E_0$ connu.

1. Donner l'expression de la densité volumique de charge $\rho(z)$ pour $z \in [z_1; z_2]$.
2. Compte tenu des hypothèses formulées ci-dessus, déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.
3. Tracer son allure pour $z \in [0; z_2]$.
4. Déterminer le potentiel électrostatique en tout point de l'espace (on choisira $V(O) = 0$).

Exercice 7 - Puissance transportée par un éclair

On modélise l'ensemble Terre-ionosphère par un condensateur sphérique. La Terre, de rayon $R = 6,4.10^3$ km, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative $-Q$ uniformément répartie à sa surface. L'ionosphère est représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R+h$ ($h = 60$ km) porteuse d'une charge $+Q$. Les propriétés électromagnétiques de l'air sont assimilées à celles du vide.

1. Exprimer le champ électrique entre les deux sphères.
2. Calculer le potentiel de l'ionosphère.
3. Déterminer la capacité de ce condensateur.
4. Simplifier son expression compte tenu des valeurs numériques et commenter le résultat obtenu. La calculer numériquement.
5. Un éclair correspond à un courant moyen de 30 kA pendant 25 ms. Quelle est sa puissance ?

Exercice 8 - Lecture de carte de champ

Soient deux fils rectilignes infinis, parallèles à l'axe (Oz) et d'équations cartésiennes respectives $x = +a$ et $x = -a$, de charges linéiques uniformes $+\lambda$ et $-\lambda$ ($\lambda > 0$). On note A_1 et A_2 leur intersection respective avec le plan (xOy).

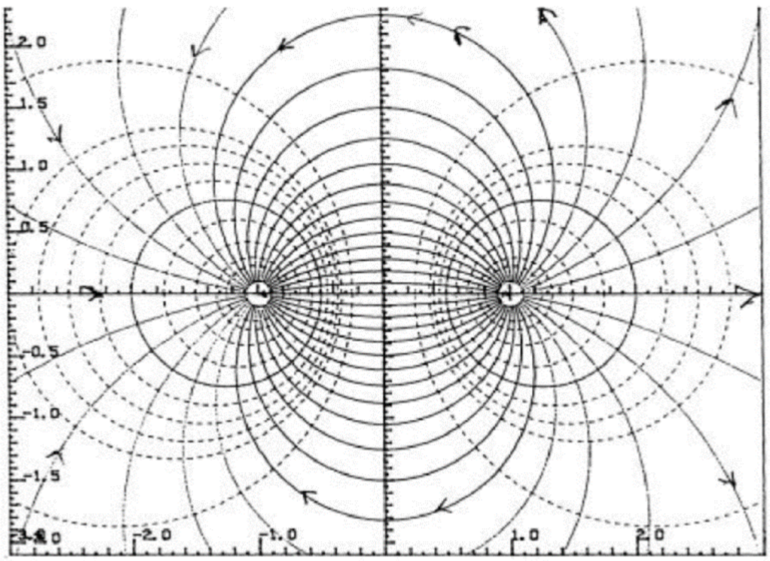
Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) et on note r_1 et r_2 les distances entre M le premier fil d'une part, M et le second fil d'autre part.

On choisit l'origine des potentiels au point O origine du repère.

1. Montrer que le champ électrique créé par un fil infini portant la distribution linéique de charge uniforme λ à une distance r de celui-ci s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$$

2. Établir l'expression du potentiel en M en fonction de λ, r_1 et r_2.
3. En posant $k = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$, établir en coordonnées cartésiennes l'équation de la surface équipotentielle, lieu des points M tels que $V(M) = V_0$. Montrer qu'il s'agit d'un cylindre dont l'intersection avec le plan (xOy) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Interpréter la carte des équipotentielles et des lignes de champ tracée ci-dessous dans un plan $z = \text{cste}$.

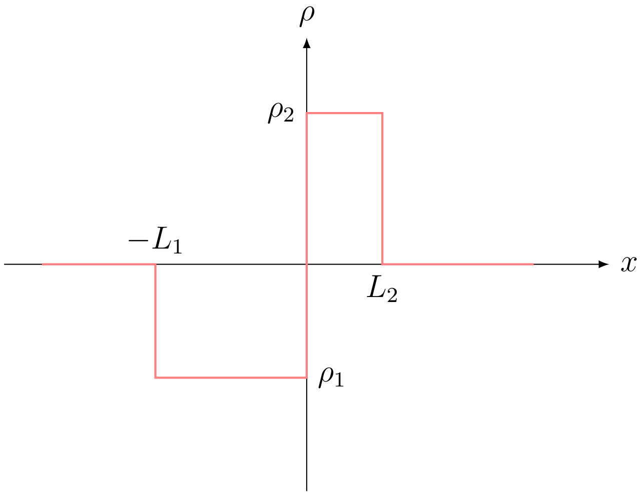


Exercice pour aller plus loin ⋆⋆⋆

Exercice 9 - Jonction PN

Lorsqu'un semi-conducteur présente, dans une région très localisée de l'espace, une variation très brutale de la concentration en dopant, voire un changement de la nature du dopant, on dit qu'on a une fonction. Au voisinage de la jonction, dans une région dite « zone de charge d'espace », le cristal acquiert une distribution de charge électrique non nulle que l'on se propose d'étudier. Les propriétés qui en résultent sont à la base de la caractéristique de diodes, des transistors et de tous les circuits intégrés.

On considère un échantillon de germanium très allongé selon les directions Ox et Oy, présentant une densité volumique de charge $\rho(z)$ invariante par translation selon ces axes Ox et Oy, autour d'une jonction située dans le plan $z = 0$, dont le profil est le suivant :



1. Sachant que la distribution de charge est globalement neutre, exprimer ρ_1 en fonction de ρ_2, L_1 et L_2.
2. Déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace en fonction de ρ_2, L_1 et L_2, ε_0 et z. On supposera que le champ électrique est nul pour un point M situé à l'infini.
3. En déduire que le potentiel électrostatique dans la zone de charge d'espace (en supposant $V(0) = 0$) s'écrit :

$$\begin{cases} V(0 \leq z \leq L_2) = -\frac{\rho_2}{\varepsilon_0}\left(\frac{z^2}{2} - L_2 z\right) \\ \\ V(-L_1 \leq z \leq 0) = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}\frac{L_2}{L_1}\left(\frac{z^2}{2} + L_1 z\right) \end{cases}$$

4. Représenter $V(z)$. Donner l'expression de la différence de potentiel U_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charge d'espace.

La région $(0 \leq z \leq L_2)$ a été dopée avec de l'antimoine Sb à raison de $N_2 = 1,6.10^{21}$ atomes de Sb par m^3 tandis que la région $(-L_1 \leq z \leq 0)$ a été dopée avec du bore B, avec un nombre volumique N_1 d'atomes de B tel que $N_1 \gg N_2$. On admet que dans la zone de charge d'espace, chaque atome Sb est ionisé en Sb^+. Les électrons ainsi libérés traversent spontanément le plan $z = 0$ et chaque atome de bore situé dans la zone de charge d'espace s'ionise en un anion B^-

5. En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_2.
6. Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension de seuil est voisine de U_0. En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charge d'espace.
7. Application numérique : calculer δ. On donne : $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F/m ; $U_0 = 0,3$ V et $e = 1,6.10^{-19}$ C.