

Electromagnétisme et thermodynamique

Conseils pour aborder le devoir

- La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat dont vous avez besoin pour les questions suivantes, vous pouvez l'admettre, mais il faut bien le préciser sur votre copie

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES

Durée de l'épreuve : 4h

A - Etude de capteurs capacitifs

Ces capteurs utilisent un condensateur comme composant principal. On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques seront supposées identiques à celles du vide (permittivité ϵ_0).

Résultats sur les champs

1. Donner les quatre équations de Maxwell en régime stationnaire.
2. Donner l'énoncé du théorème de Gauss de l'électrostatique.
3. Démontrer ce théorème à partir de la relation de Maxwell-Gauss.

Fonctionnement

On applique une tension U aux armatures du condensateur.

4. Effectuer un schéma figurant : le condensateur, la tension U (représentée par une flèche) et les charges stockées.
5. Rappeler la loi liant la charge du condensateur Q et la tension U .
6. Expliquer **qualitativement** pourquoi les charges électriques des armatures se condensent sur les portions d'armature se faisant vis-à-vis (appelées surfaces en regard).

Capacité du condensateur plan

On s'intéresse ici au cas d'un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques en regard l'une de l'autre (aire de chaque armature : S), parallèles, distantes de e , séparées par de l'air (**Fig. 1a**). Les armatures en regard portent respectivement les densités surfaciques uniformes de charge $-\sigma$ et $+\sigma$. On considérera les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que e , ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité (ce qui revient à dire que l'on néglige les effets de bords).

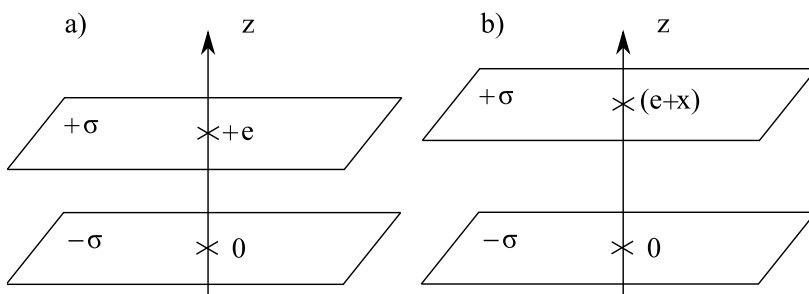


Fig. 1 : Condensateur plan
 a) Position de référence.
 b) Position après déplacement de l'armature supérieure d'une quantité algébrique x

7. Reproduire et compléter la **Fig. 1a** en dessinant l'allure des lignes orientées du champ électrostatique.
8. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ dans tout l'espace en expliquant la méthode utilisée et en donner une représentation graphique $E(z)$.
9. En déduire le potentiel $V(M)$ (on considérera $V = 0$ sur l'armature de densité surfacique négative).
10. Représenter graphiquement le potentiel en fonction de z .
11. En déduire l'expression littérale de la capacité C_{P0} du condensateur plan
12. On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe, tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique x ($x > -e$) par rapport à sa position de référence $x = 0$ (**Fig. 1b**) :
 - (a) Donner l'expression de la nouvelle capacité $C_P(x)$ en fonction de C_{P0} , e et x .

- (b) Tracer l'allure de $C_P(x)$ pour $x > -e$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables sur les deux axes.
- (c) On envisage la situation de petits déplacements ($|x| \ll e$) : déterminer une expression approchée au premier ordre de la capacité du condensateur.
- (d) Tracer la représentation graphique correspondante sur le graphe de la question 12.b.

Condensateur cylindrique

On considère un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales séparées par de l'air, selon le schéma et la légende de la figure **Fig. 2a**. L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$; ces charges sont supposées uniformément réparties sur les surfaces.

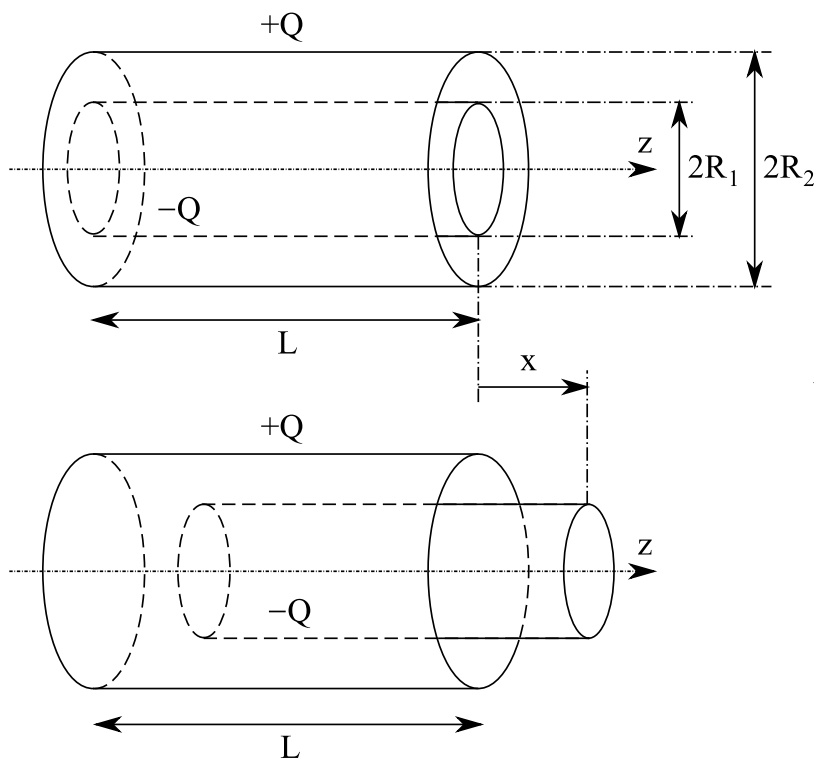


Fig. 2 : Condensateur cylindrique
 a) Position de référence.
 b) Position après déplacement de l'armature supérieure d'une quantité algébrique x

Les données sont : les rayons R_1 et R_2 ; la permittivité ε_0 ; la longueur L .

L est beaucoup plus grand que R_2 , de telle sorte que l'on peut adopter un modèle illimité.

13. Quel est le système de coordonnées spatiale le plus adapté ici ?
14. Déterminer, en justifiant qualitativement mais de manière précise, la direction, le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.
15. Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ en tout point de l'espace en fonction de Q et des données.

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous avec les expressions littérales dans chaque zone de l'espace :

r	$r \in [0, R_1[$	$r \in]R_1, R_2[$	$r \in]R_2, \infty[$
$\ \vec{E}\ $			

16. En déduire le potentiel électrostatique V (on impose $V = 0$ sur l'armature intérieure), puis la différence de potentiel entre l'armature externe et l'armature interne.

17. Déterminer C_{C0} la capacité du condensateur sous la forme $C_{C0} = A_C.L_r$ où L_r est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L_r = L$). Expliciter A_C en fonction des données.
18. L'armature intérieure du condensateur est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique x par rapport à sa position de référence, selon le schéma de la **Fig. 2b**.
On rappelle que les charges se condensent sur les portions d'armatures en regard.
Déterminer l'expression littérale de la capacité $C_C(x)$ associée à une position x donnée du cylindre intérieur en fonction de C_{C0} , L et x .
19. Tracer l'allure de $C_C(x)$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables (pentes et valeurs sur les axes).
20. Dans la perspective de la mesure d'un déplacement x , quelles sont les différences notables entre $C_P(x)$ et $C_C(x)$?

Montage potentiométrique

Les variations de capacité $C(x)$ sous l'effet du déplacement de l'une des deux armatures doivent être converties en tension de manière à pouvoir être traitées par un organe de décision ou transmises à un circuit électronique. On envisage ici une solution utilisant le montage potentiométrique de la figure **Fig. 3** alimenté par la tension $e(t) = E \cos(\omega t)$.

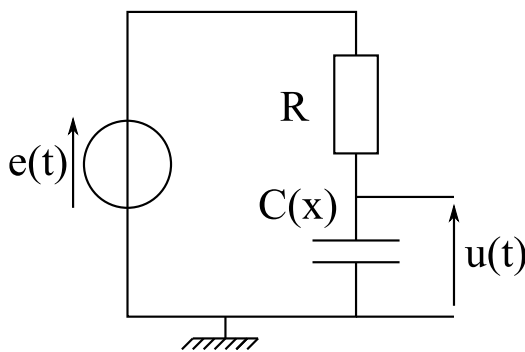


Fig. 3 : Montage potentiométrique de conversion du déplacement x en tension $u(t)$.

La tension $e(t)$ d'alimentation possède une amplitude E et une pulsation ω .

On s'intéressera en particulier à la sensibilité du capteur, définie par la relation $\sigma_Y = dY/dx$, où Y représente la grandeur de sortie exploitée (amplitude U ou phase φ de la tension $u(t)$), dont on souhaite idéalement qu'elle soit à la fois élevée et indépendante de x .

21. $u(t)$ s'exprimant sous la forme $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$, déterminer les expressions littérales de U et de φ en fonction de E , C , R et ω .
22. En déduire les sensibilités σ_U et σ_φ en fonction de $C(x)$, $dC(x)/dx$, R , E et ω .
23. On envisage ici l'insertion du condensateur cylindrique étudié précédemment :
 - (a) Indiquer, en justifiant votre réponse, si les deux sensibilités σ_U et σ_φ correspondantes sont ou non indépendantes de x ?
 - (b) L'amplitude E de la tension d'entrée $e(t)$ est susceptible de varier. Quelles sont les conséquences respectives sur σ_U et σ_φ ?
 - (c) Laquelle des deux grandeurs de sortie U ou φ a-t-on finalement intérêt à exploiter et pourquoi ?

Condensateur double

On complète maintenant le capteur à géométrie cylindrique en symétrisant la structure selon le schéma de la **Fig. 4**. Cela permet notamment de minimiser les effets de bords négligés jusque-là mais présents en pratique. La partie mobile en translation, selon un déplacement algébrique x , correspond à l'armature cylindrique intérieure du condensateur double; il en résulte deux capacités C_1 et C_2 dont les valeurs dépendent de x , soit $C_1 = C_1(x)$ et $C_2 = C_2(x)$.

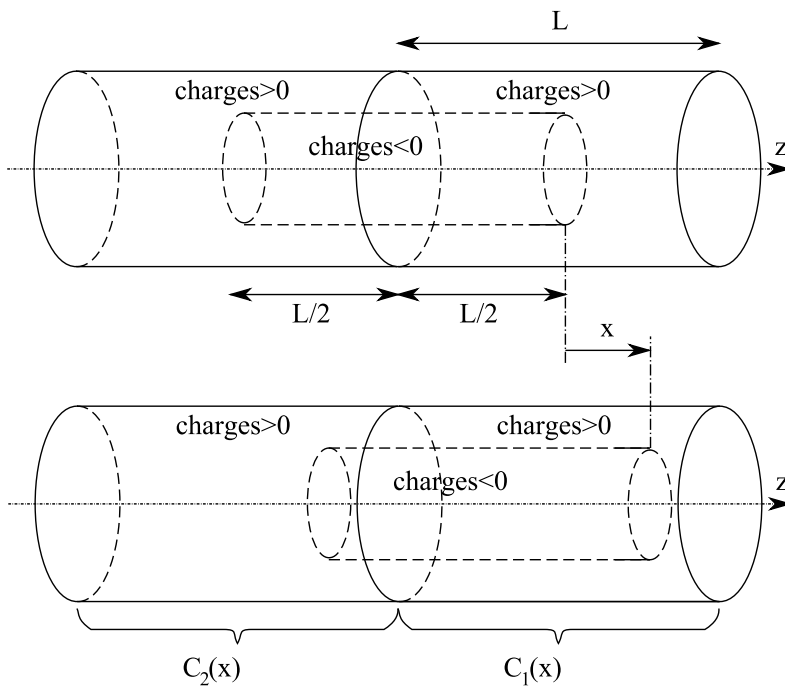


Fig. 4 : Condensateur cylindrique double : à deux armatures externes et une armature interne.

a) Position de référence.

b) Position après une translation x .

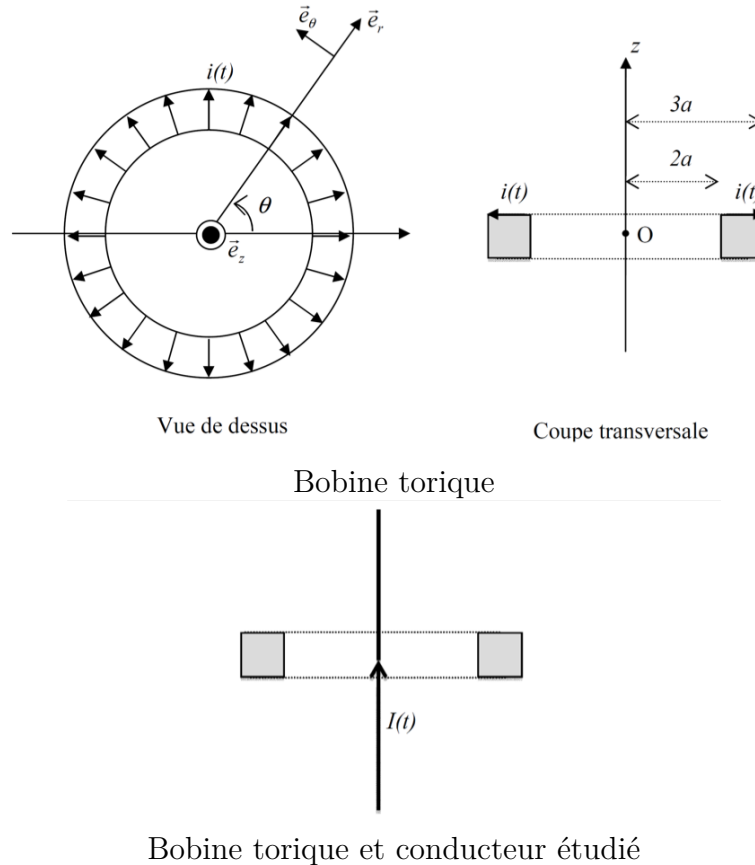
24. Déterminer les longueurs $L_1(x)$ et $L_2(x)$ des portions de cylindre en regard et en déduire, en utilisant les résultat de la question 17., les expressions littérales de $C_1(x)$ et de $C_2(x)$.
25. Représenter sur le même graphe les allures de $C_1(x)$ et de $C_2(x)$. Quelle particularité peut-on constater ?

B - Pince ampèremétrique

On se propose d'étudier dans cette partie le fonctionnement d'une pince ampèremétrique à induction. Dans toute cette partie on se placera dans l'approximation des régimes quasistationnaires. On suppose que tous les résultats et les raisonnements de la magnétostatique sont valables en régime quasistationnaire.

Une pince ampèremétrique est un instrument de mesure du courant électrique dans un conducteur. La pince est disposée autour du conducteur parcouru par le courant dont on souhaite mesurer l'intensité. La pince ainsi positionnée permet d'accéder à l'intensité étudiée.

Une pince ampèremétrique à induction est constituée d'un tore de section carré de côté a d'axe (Oz) et de rayon moyen $\frac{5a}{2}$ (figures 1 et 2) sur lequel sont bobinées régulièrement un grand nombre de spires carrées de côté a disposées en série. Ce circuit de résistance totale R est fermé sur un ampèremètre de résistance interne négligeable.



L'espace est rapportée à la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

La pince est disposée autour d'un conducteur parcouru par le courant dont on souhaite mesurer l'intensité.

Le conducteur enserré par la pince ampèremétrique est considéré comme un fil infini. Il est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ de pulsation ω et est confondu avec l'axe (Oz) .

26. Justifier l'existence d'un courant $i(t)$ dans le bobinage torique de la pince ampèremétrique.

Soit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur de l'intensité du courant dans la pince ampèremétrique en régime sinusoïdal forcé et N le nombre de spires bobinées autour du tore. Soit \vec{B} le champ magnétique total qui résulte du champ créé par le courant $I(t)$ dans le fil et par le courant $i(t)$ dans la pince.

27. Montrer que le champ magnétique est nécessairement orthoradial. Montrer que celui-ci peut se mettre sous la forme : $\vec{B} = B_\theta(r, z, t)\vec{u}_\theta$

28. En appliquant le théorème d'Ampère à un contour (C) bien choisi et que l'on précisera, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour un point M situé à l'intérieur du tore ($r \in [2a; 3a]$ et $z \in [-a/2; a/2]$).

29. Etablir l'expression du flux φ du champ magnétique à travers une spire du tore en fonction de μ_0 , $I(t)$, $i(t)$, N et a . En déduire le flux total φ_{tot} à travers les N spires du tore en fonction de μ_0 , $I(t)$; $i(t)$, N et a .

30. Rappeler les définitions respectives du coefficient d'auto-inductance L et du coefficient de mutuelle inductance M . Donner φ_{tot} en fonction de M , L , $i(t)$ et $I(t)$.

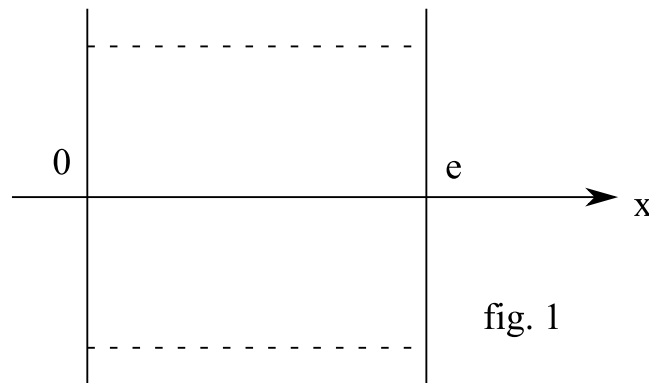
On peut ainsi déduire des résultats précédents que les expressions de L et M sont les suivantes :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

31. Etablir l'expression de la force électromotrice induite $e(t)$ induite dans le tore en fonction de L , M , $\frac{di}{dt}$ et $\frac{dI}{dt}$.
32. Ce tore de résistance totale R est fermé sur un ampèremètre de résistance interne négligeable. On définit la fonction de transfert complexe de la pince par $\underline{H} = \frac{i}{I}$. En utilisant la notation complexe, déterminer l'expression de la fonction de transfert en fonction de M , L , ω et R .
33. Déterminer l'expression du module $|\underline{H}|$ de la fonction de transfert en fonction de M , L , ω et R . Que devient l'expression du module en haute fréquence ? En basse fréquence ? Ce dispositif permet-il de mesurer des intensités dans toutes les gammes de fréquence ? En particulier, permet-il de mesurer une intensité en courant continu ?
34. Quel est l'intérêt d'une pince ampèremétrique par rapport à un ampèremètre classique ?

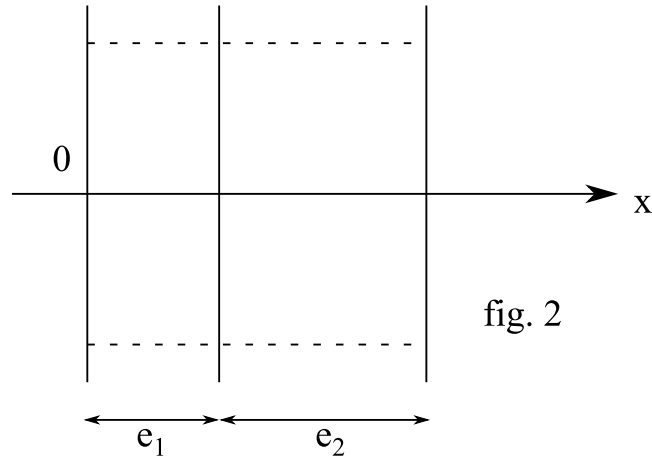
C - Problème d'isolation

35. Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique, en précisant les unités des différentes grandeurs impliquées. Commenter le signe.
36. On considère un matériau plan étendu, d'épaisseur e , mis en contact sur sa face $x = 0$ avec une source de chaleur à la température T_0 , et sur sa face en $x = e$ avec une source à la température T_1 (fig. 1).

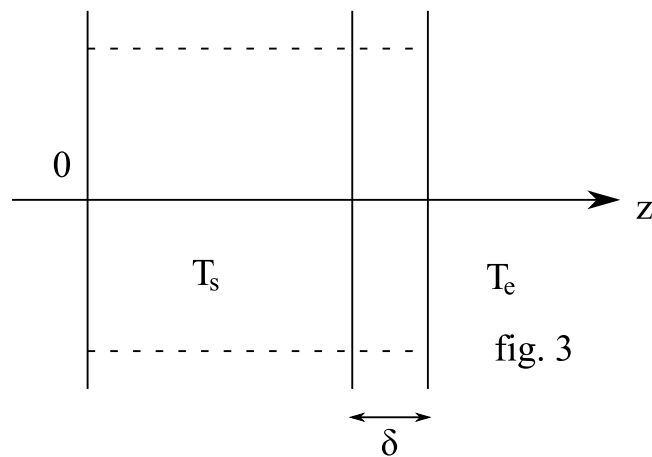


En introduisant la masse volumique μ , la chaleur massique c et la conductivité thermique λ , déterminer, en justifiant les étapes, l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x, t)$. Quel est le temps caractéristique τ pour que la chaleur diffuse sur une distance L ?

37. Déterminer $T(x)$ en régime stationnaire.
38. définir et exprimer la résistance thermique R pour une section de 1 m^2 , ainsi que la résistance r d'une plaque de surface S .
39. On considère maintenant deux matériaux de conductivités différentes λ_1 et λ_2 , d'épaisseurs respectives e_1 et e_2 , ayant une face commune (fig. 2). Déterminer en régime permanent la température à l'interface T_0 lorsque les faces externes sont à, respectivement, T_1 et T_2 . À quelle condition T_0 est-elle proche de T_1 ? de T_2 ?



40. Donner l'ordre de grandeur de la conductivité thermique pour un gaz, un corps condensé non conducteur et un solide conducteur.
41. Il est recommandé de revêtir les murs d'une maison d'une couche de polystyrène expansé. Justifier quantitativement cette assertion par estimation du flux thermique selon deux situations que l'on précisera.
42. On considère un matériau solide de température T_s au contact d'un gaz à la température T_e . Il existe alors une couche de faible épaisseur δ de gaz accrochée à la surface du solide. La température varie de T_s à T_e sur cette couche. En considérant que la température ne varie qu'en fonction de z (fig. 3), montrer que la puissance thermique transférée à travers la surface d'échange S vaut $P = hS(T_s - T_e)$, h s'exprimant en fonction de la conductivité thermique du gaz et de δ .



43. Déterminer la résistance thermique associée à ce processus. Que peut-on entreprendre pour diminuer h ?