



Epreuve de Physique A

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Tournez la page S.V.P

Le barrage de Grand'Maison est un barrage hydroélectrique situé dans le département de l'Isère. Avec une puissance de 1800MW à débit maximal, l'usine qui lui est associée forme le plus puissant ensemble hydroélectrique français, correspondant à 9% de la puissance du parc hydraulique exploité par EDF en France. La figure 1 donne une vue d'ensemble de l'installation.

La retenue de Grand'Maison peut contenir près de 140 millions de m³ d'eau, emmenée vers la retenue du Verney par une galerie d'amenée et trois conduites forcées construites en parallèle. La conduite d'amenée descend en pente douce depuis le barrage haut jusqu'à une cheminée d'équilibre de 200 m de hauteur qui permet de réguler la pression à l'ouverture et la fermeture des vannes (dispositif anti coup de bélier). À partir de ce lieu, l'eau est amenée à l'altitude du Verney par les trois conduites forcées de grande pente.

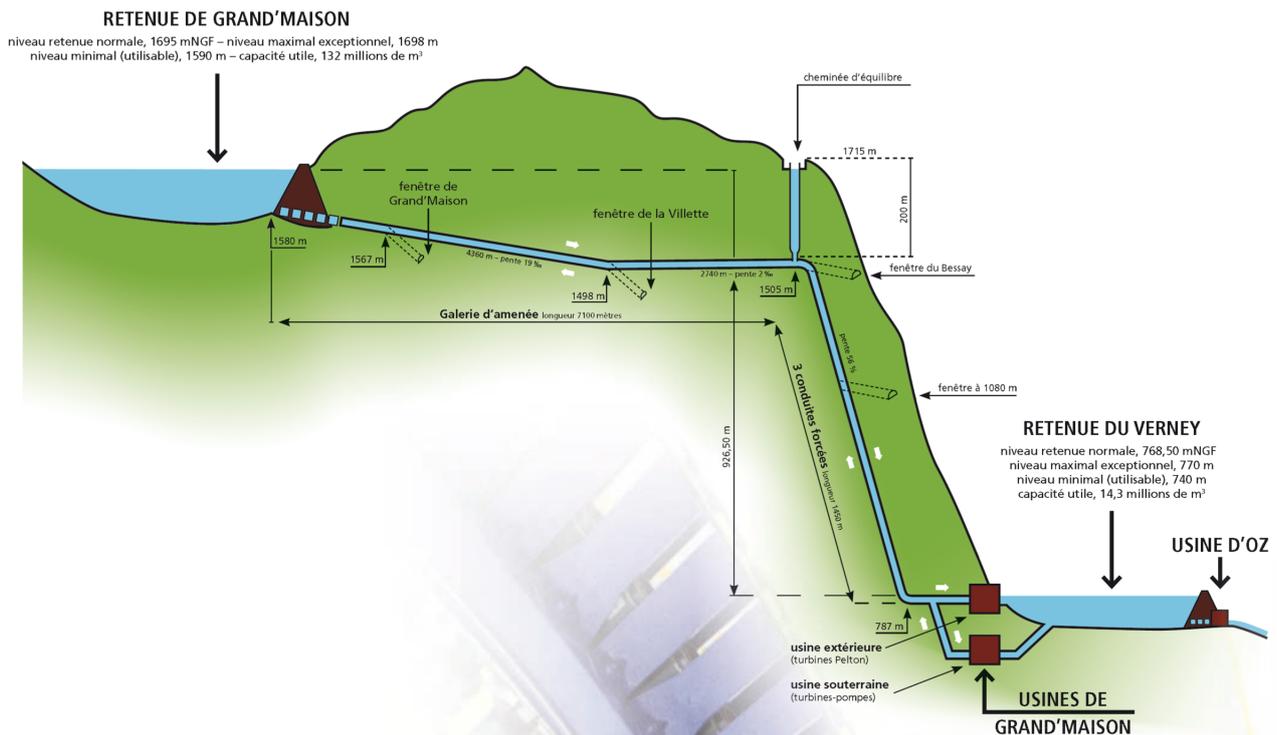


FIGURE 1 – Schéma général de l'installation hydroélectrique de Grand'Maison. Source : EDF

Hypothèses et données :

- ▷ Seul le régime permanent est considéré dans ce problème ;
- ▷ L'eau est un liquide incompressible, de masse volumique $\rho = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$;
- ▷ La pression atmosphérique est supposée uniforme, égale à $P_0 = 1 \text{ bar}$;
- ▷ L'axe z est vertical orienté vers le haut, d'origine $z = 0$ au niveau du Verney où émergent les conduites forcées ;
- ▷ Le point d'entrée de la conduite d'amenée se trouve à une altitude $z_e = 800 \text{ m}$ au dessus du Verney et sous une hauteur d'eau $H = 140 \text{ m}$.

I - Etude de la centrale hydroélectrique

1. Donner l'ordre de grandeur de la puissance électrique produite par une centrale thermique, par une tranche de centrale nucléaire ou par un parc éolien en mer.
2. Quel inconvénient, lié à la production électrique, est associé à l'éolien, terrestre surtout, et au solaire ?

A - Dimensionnement du barrage amont

Le barrage amont est un barrage poids (voir figure 2), constitué d'une structure en béton de longueur $L = 550$ m dans la direction (Oy) dont la coupe transversale peut être modélisée par un triangle rectangle de hauteur $H = 140$ m égale au niveau d'eau maximal du barrage et de base d que l'on cherche à dimensionner.

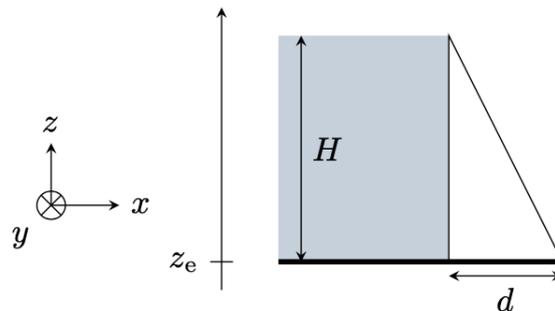


FIGURE 2 – Barrage poids

3. Justifier qualitativement que l'eau dans la retenue amont peut être supposée en équilibre hydrostatique.
4. Déterminer le champ de pression dans la retenue amont $P(z)$.
5. Montrer que la résultante des forces pressantes exercées par l'eau sur le barrage vaut

$$\vec{F}_p = \left(P_0 + \rho g \frac{H}{2} \right) HL \vec{u}_x$$

6. On donne la masse volumique du béton $\rho' = 3.10^3$ kg.m⁻³. Exprimer le poids \vec{P} du barrage.
7. Un barrage poids doit être dimensionné de telle sorte que $F_p < \frac{4}{3}P$. En déduire la valeur minimale de d .

B - Bilan de puissance

Pour aller de la retenue de Grand-Maison jusqu'à l'usine hydroélectrique, l'eau circule d'abord dans une conduite d'amenée de diamètre $D = 7$ m et de longueur $L = 7$ km, jusqu'à la verticale de la cheminée d'équilibre. Cette conduite d'amenée se sépare ensuite en trois conduites forcées identiques, de diamètre $d < D$ et de longueur $l = 1500$ m. Chaque conduite forcée est envoyée vers un bloc turbine en sortie duquel l'eau a une vitesse nulle et une pression égale à la pression

atmosphérique. Le barrage fonctionne de telle sorte que la vitesse de l'eau est d'environ 5 m.s^{-1} dans la galerie d'amenée et 15 m.s^{-1} dans les conduites forcées.

8. Déterminer le débit volumique Q entre la retenue de Grand'Maison et la retenue du Verney. En déduire le diamètre des conduites forcées. On prendra $1/\sqrt{3} \simeq 0,6$
9. Déterminer la puissance maximale fournie aux turbines.
10. Définir le phénomène de perte de charge. Rappeler ce qui distingue les pertes de charge régulières et singulières.

Les pertes de charge régulières peuvent être calculées par la relation empirique de Darcy-Weisbach,

$$\tilde{h} = \lambda \frac{V^2}{2gD} L$$

avec V la vitesse de l'écoulement, D le diamètre et L la longueur de la conduite dans laquelle il a lieu, et λ un coefficient de perte de charge sans dimension. La valeur de λ peut être déterminée à partir du diagramme de Moody, représenté figure 3. Elle dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement et/ou de la rugosité relative de la conduite ε_r , définie comme le rapport entre la rugosité absolue ε (hauteur caractéristique des aspérités sur la paroi) et le diamètre D , $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D}$.

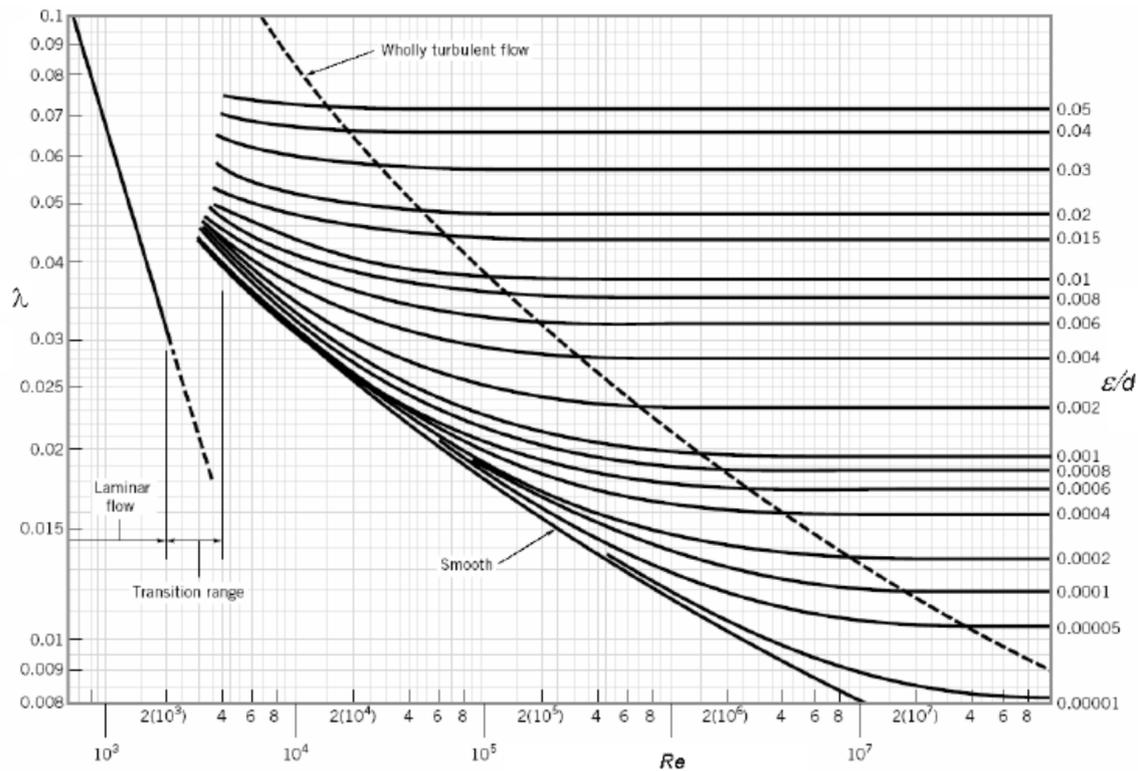


FIGURE 3 – Diagramme de Moody

11. Vérifier que λ est sans unité.
12. Calculer le nombre de Reynolds dans la conduite d'amenée. L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?
13. La conduite d'amenée est en béton, de rugosité $\varepsilon = 0,7 \text{ mm}$. Déterminer le coefficient de perte de charge λ .

14. En déduire la perte de charge régulière totale dans la conduite d'amenée, exprimée en hauteur d'eau équivalente \tilde{h}_a .

La perte de charge dans chacune des conduites forcées se calcule par un raisonnement analogue et vaut $\tilde{h}_f = 55$ m.

15. En déduire la puissance réellement fournie par l'écoulement aux turbines.

C - Fonctionnement en pompage-turbinage

Les deux retenues de Grand'Maison (en amont) et du Verney (en aval) ont la particularité de constituer une station de transfert d'énergie par pompage, abrégée STEP. Certaines des turbines de l'installation de Grand'Maison peuvent également fonctionner en pompe et permettent de remonter l'eau de la retenue du Verney vers la retenue de Grand'Maison avec un débit $Q' = 135 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Lorsque la production électrique est supérieure à la demande, l'eau est ainsi remontée (phase de pompage) puis peut être libérée pour produire à nouveau de l'électricité (phase de turbinage) lorsque la production a baissé : entre temps, l'énergie est stockée sous forme d'énergie potentielle. Cela permet d'optimiser l'adéquation entre production et consommation, ce qui est un enjeu crucial pour l'insertion massive des sources renouvelables intermittentes (principalement solaire et éolien) sur les réseaux électriques.

16. Quel intérêt de pouvoir pomper de l'eau de l'aval à l'amont d'un barrage du point de vue de la production électrique globale d'un pays ?
17. Expliquer simplement pourquoi le rendement de l'opération de pompage turbinage doit être estimé à partir des travaux massiques plutôt que des puissances indiquées.
18. En exploitant le résultat de la question 15., déterminer le travail indiqué massique fourni par l'eau à la turbine lors de la phase de turbinage.
19. Déterminer le travail indiqué massique à fournir lors de la phase de pompage. Pour le débit Q' , la perte de charge totale vaut $\tilde{h}' = 100$ m.
20. En déduire le rendement énergétique r d'un cycle de pompage-turbinage.

D - Cavitation

La cavitation est un phénomène très néfaste pour la durée de vie des conduites, et qu'il est absolument indispensable de neutraliser lors de la conception d'un barrage. Pour le comprendre physiquement, on suppose pour cette dernière partie que l'eau ne s'écoule que dans une unique conduite de diamètre D uniforme et on néglige les pertes de charge.

21. En supposant que cette conduite débouche à l'air libre, déterminer la vitesse de l'eau en sortie de barrage.
22. Montrer qu'au sein des conduites la pression $P(z)$ évolue avec l'altitude selon

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)$$

avec z_0 à exprimer en fonction des données. Montrer que la pression s'annule à une hauteur z à estimer numériquement. Que penser physiquement de ce résultat ?

23. En s'appuyant sur un diagramme (P, T) à tracer sur la copie, expliquer le phénomène physique qui a lieu avant que la pression ne s'annule. Comment nomme-t-on la pression à laquelle il a lieu ?

Pour contrer la cavitation, on dispose à l'extrémité libre de la conduite une tubulure de longueur négligeable et de section décroissante appelée injecteur, schématisé figure 4, de diamètre de sortie δ .

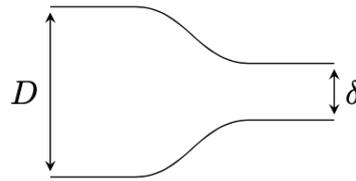


FIGURE 4 – Injecteur

24. Exprimer $P(z)$ en présence de l'injecteur et en déduire que la cavitation disparaît si δ est plus faible qu'une valeur limite δ_0 .

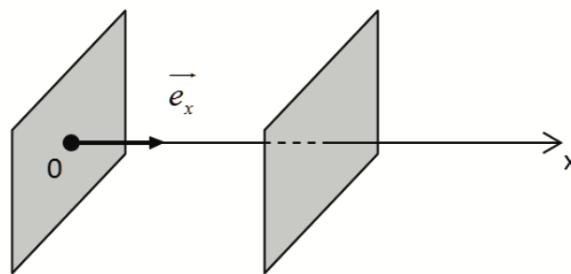
II - Mesure du niveau de l'eau dans la retenue de Grand'Maison

On souhaite mesurer la hauteur h d'eau dans la retenue à l'aide d'un capteur capacitif. Ce dernier peut être assimilé à un condensateur plan de capacité $C(h)$, fonction de h et constitué de 2 armatures rectangulaires en cuivre de hauteur H , de largeur L et distantes de e .

H correspond également à la hauteur maximale d'eau dans la retenue et on considérera $h = 0$ quand le niveau dans la retenue est à son minimum.

A - Champ électrostatique d'un condensateur plan

Considérons 2 plaques métalliques planes, de surface S , perpendiculaires à l'axe (Ox) , caractérisées par les abscisses respectives $x = 0$ et $x = e$ et portées respectivement aux potentiels V_1 et V_2 .



Nous supposons que les dimensions transversales de ces plaques sont assez grandes pour pouvoir négliger les effets de bord. Ainsi nous supposons que le potentiel entre les 2 plaques ne dépend que de x et s'écrit $V(x)$.

En outre, on suppose que ces 2 plaques constituent un condensateur : l'espace entre ces 2 armatures est vide et elles portent des charges électriques opposées ($Q_2 = -Q_1$ avec Q_2 charge portée par la plaque d'abscisse $x = e$).

25. Montrer, par des considérations de symétrie et d'invariance, que le champ électrique $\vec{E}_1(M)$ créé par la plaque en $x = 0$ seule en tout point de l'espace est perpendiculaire à ce plan et ne dépend que d'une variable d'espace.

26. Justifier que $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$ où M et M' sont deux points placés symétriquement par rapport au plan $x = 0$.
27. En appliquant le théorème de Gauss sur une surface clairement indiquée, exprimer le champ électrique $\vec{E}_1(M)$.
28. Dédire du résultat précédent l'expression du champ électrique total $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$ créé par les deux plaques en $x = 0$ et $x = e$ en tout point de l'espace.
29. En déduire l'expression de la capacité C_0 du condensateur plan à l'aide de e , S et ε_0

B - Capacité du capteur

On peut représenter le capteur sur la figure 5.

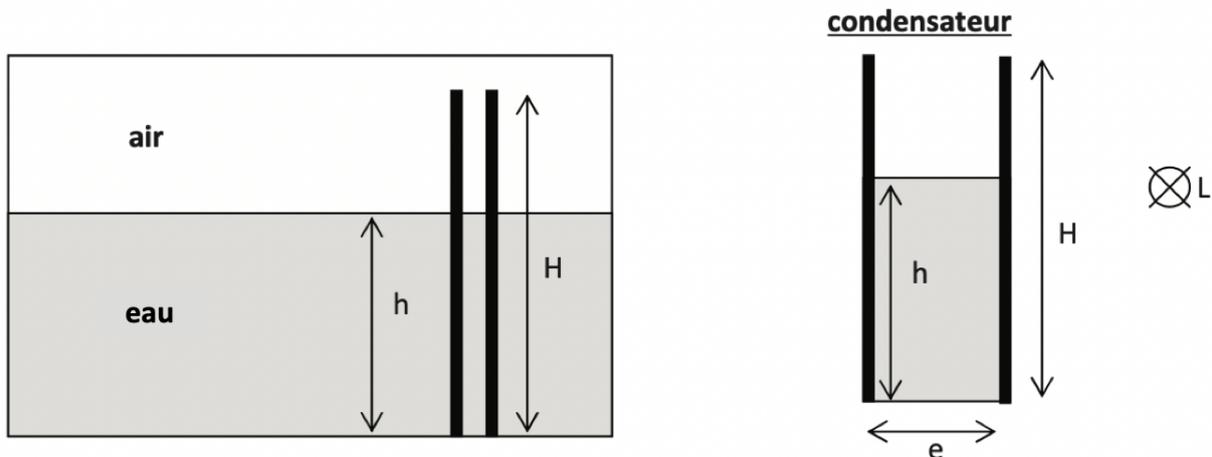


FIGURE 5 – Capteur de niveau

On admet que la capacité d'un condensateur plan rempli d'un isolant de permittivité relative ε_r vaut $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$

30. Quel peut être le problème en utilisant ce capteur pour mesurer un niveau d'eau ?
31. Montrer que l'association en parallèle de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 est équivalente à un seul condensateur de capacité $C_{eq} = C_1 + C_2$.
32. En déduire l'expression de $C(h)$ en fonction de h , H , L , e , ε_r (permittivité relative de l'eau) et ε_0 .

Les valeurs choisies pour les différentes dimensions donnent une capacité $C_{max} = 600$ pF lorsque la retenue est pleine et une capacité $C_{min} = 100$ pF lorsque la retenue est vide (cela correspond à une différence de niveau de 100 m).

C - Chaîne de mesure

La chaîne de mesure est décrite de manière synoptique sur le schéma de la figure 6. L'objectif est d'obtenir une tension $v_3(t)$ proportionnelle à $C(h)$.

Un monostable est un circuit possédant deux états en sortie. Un état stable (durée indéfinie) et un état instable de durée T_0 fixe. Le passage à l'état instable se produit sous l'effet d'une

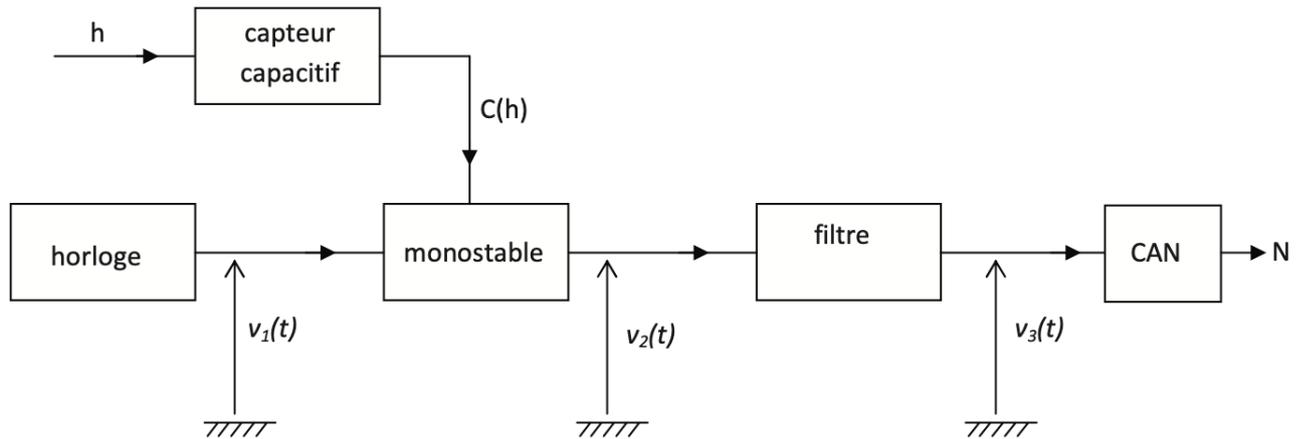


FIGURE 6 – Schéma de la chaîne de mesure

impulsion de commande délivrée par le signal d'horloge de période $T = 2,00$ ms et dont l'état haut a une durée θ très petite devant T (voir figure 7). On impose $T_0 < T$.

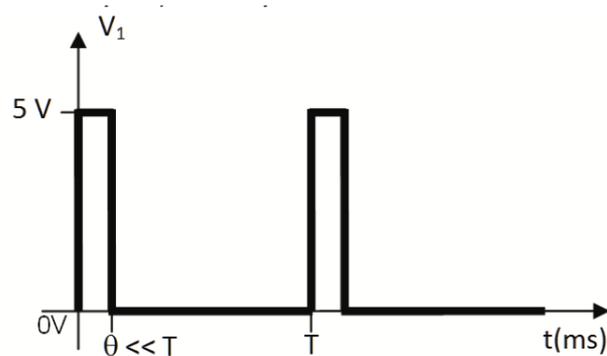


FIGURE 7 – Impulsions de commande

Le condensateur étudié en partie B est inséré dans le circuit électronique (non étudié ici) du monostable ; on admet que dans ces conditions T_0 (appelée durée propre du monostable) est proportionnelle à $C(h)$: $T_0 = R.C(h)$ où R est un facteur de proportionnalité.

La notice technique du monostable indique par ailleurs qu'en fonctionnement normal :

- ▷ T_0 est supérieure à $10,0 \mu s$
- ▷ La bascule de l'état stable à l'état instable se réalise quasi-instantanément sur front montant du signal d'horloge.
- ▷ La bascule de l'état instable à l'état stable se réalise quasi-instantanément au bout d'un temps T_0
- ▷ L'état instable en sortie a pour valeur $U_0 = 5,00$ V ; l'état stable en sortie a pour valeur $0,00$ V.

33. Expliquer qualitativement pourquoi il est nécessaire d'imposer $T_0 < T$.

34. Déterminer la plage de variation de R pour que le monostable fonctionne correctement.

35. On choisit dorénavant $R = 2,00 \text{ M}\Omega$. Déterminer la plage de variation de T_0 lors du fonctionnement du capteur capacitif.
36. Tracer sur la copie, en justifiant, une allure du graphe de $v_2(t)$ pour t entre 0 et $2T$ en y plaçant U_0 , T_0 et T .
37. Etablir l'expression de la valeur moyenne V_{2moy} de $v_2(t)$ à l'aide de U_0 , T et T_0 .
En déduire la plage de variation de V_{2moy} lors du fonctionnement du capteur capacitif.
38. On désire obtenir en sortie du filtre mentionné dans le schéma synoptique $v_3(t) = V_{2moy}$.
Proposer un montage simple, constitué d'un conducteur ohmique de résistance $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et d'un condensateur de capacité C_1 , réalisant cette opération.
Déterminer une condition sur la valeur numérique de C_1 afin d'obtenir en sortie du filtre cette valeur moyenne.

On souhaite visualiser le résultat de la mesure de h à l'aide d'un afficheur numérique. Pour cela, on utilise préalablement un CAN (convertisseur analogique numérique) permettant la numérisation de la tension v_3 en un nombre N binaire exprimé sur 8 bits. La valeur maximale admise en entrée du CAN est $V_{max} = 5,00 \text{ V}$. La valeur minimale est $0,00 \text{ V}$.

39. Que vaut le pas (ou quantum) q du CAN ?
40. En déduire la plus petite variation de hauteur de liquide Δh mesurable.
41. Que vaut la valeur N_{min} de N (exprimé en base 10) quand la retenue est vide ?
Que vaut la valeur N_{max} de N (exprimé en base 10) quand la retenue est pleine ?

III - Remplissage de la retenue : pluie et arc-en-ciel

A - Théorie géométrique de l'arc en ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la figure 8.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (figure 8) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

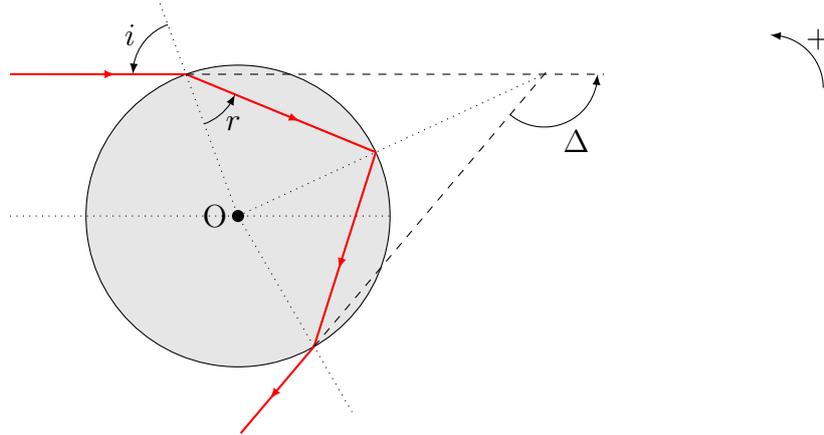


FIGURE 8 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

42. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .
43. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (figure 8). Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.
Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$.
44. Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Donnée : $\frac{d}{du} \arcsin(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

45. Justifier à l'aide de la figure 9 que l'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

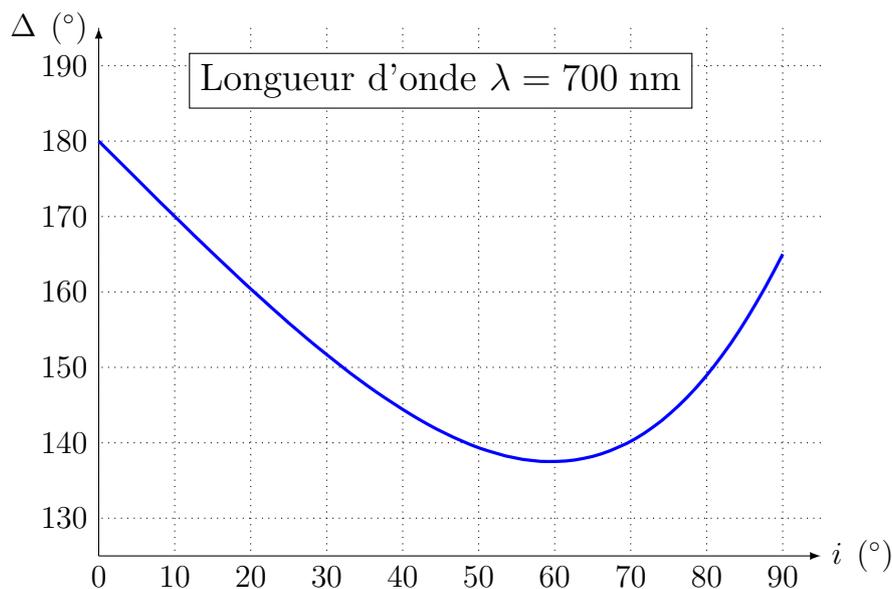


FIGURE 9 – Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

46. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?
On donne dans le cas de l'eau, pour le violet : $\lambda = 400 \text{ nm}$, $n = 1,343$ et pour le rouge : $\lambda = 700 \text{ nm}$, $n = 1,330$.

B - Théorie ondulatoire de l'arc en ciel

Deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives ω_1 et ω_2 .

Ces deux ondes se propagent dans un milieu d'indice n et interfèrent en un point P après avoir parcouru les distances $x_1 = S_1P$ et $x_2 = S_2P$. On modélise les amplitudes des ondes en P par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1)$$

$$s_2(P, t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

avec $k_i = n_i \frac{\omega}{c}$ ($i = 1$ ou 2), a_1 , a_2 , φ_1 et φ_2 constantes. c est la célérité de la lumière dans le vide.

47. Donner un ordre de grandeur de ω_1 et ω_2 pour la lumière visible.
48. L'intensité lumineuse $I(P)$ observée à l'œil nu en P est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'amplitude reçue en P, soit : $I(P) = K \langle s^2(P, t) \rangle_\tau$. Sur quelle durée τ cette valeur moyenne est-elle calculée ?
49. Calculer l'intensité $I(P)$ et montrer qu'elle s'écrit :

$$I(P) = I_1 + I_2 + I_{12}(P)$$

À quelle(s) condition(s) le terme $I_{12}(P)$ est-il non nul ?

$$\text{Donnée : } \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

50. On suppose dans la suite que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et $\varphi_1 = \varphi_2$. Montrer que l'intensité en P s'écrit :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(P)\right)$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. La grandeur $\delta(P)$ sera exprimée en fonction de l'indice n du milieu, de x_1 et de x_2 .

Il est possible (photo 10) dans un arc-en-ciel d'observer, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits « surnuméraires ».

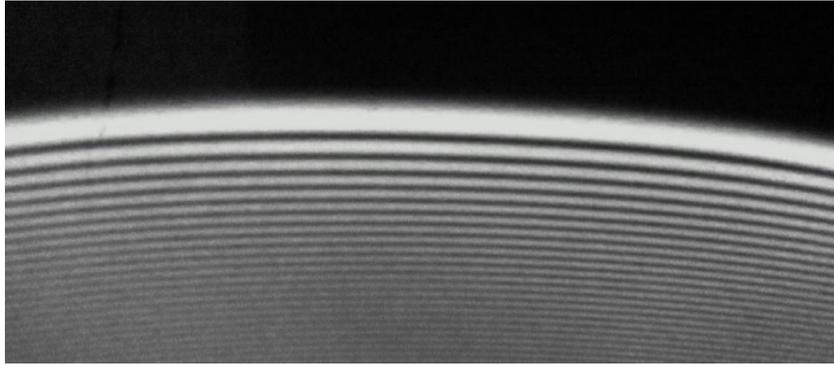


FIGURE 10 – Franges d'interférences obtenues en lumière monochromatique avec une goutte d'eau.

51. Représenter la courbe $I(P)$ en fonction de $\delta(P)$. En observant la photo 10, que peut-on dire de I_1 et I_2 ?

On considère (figure 11) deux rayons d'incidences i_1 et i_2 , voisins du rayon d'incidence i_m (en pointillés) sur une goutte d'eau, se réfléchissant une seule fois à l'intérieur de la goutte d'eau et émergeant dans des directions parallèles.

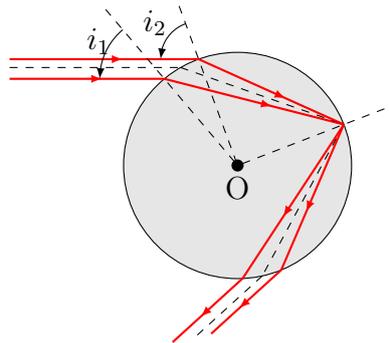


FIGURE 11 – Rayons responsables des interférences.

52. Où ces rayons interfèrent-ils ? En pratique, comment procéder pour les observer sur un écran ?
53. On admet que la différence de marche en un point P du champ d'interférences s'écrit :

$$\delta(P) = D (\cos(i_2) - \cos(i_1)) - 2Dn (\cos(r_2) - \cos(r_1))$$

Exprimer la condition permettant d'observer des interférences constructives.

54. Exprimer le diamètre de goutte permettant d'observer la frange claire d'ordre -2 dans la direction des rayons émergents en fonction de λ , i_1 , i_2 , r_1 et r_2 .